

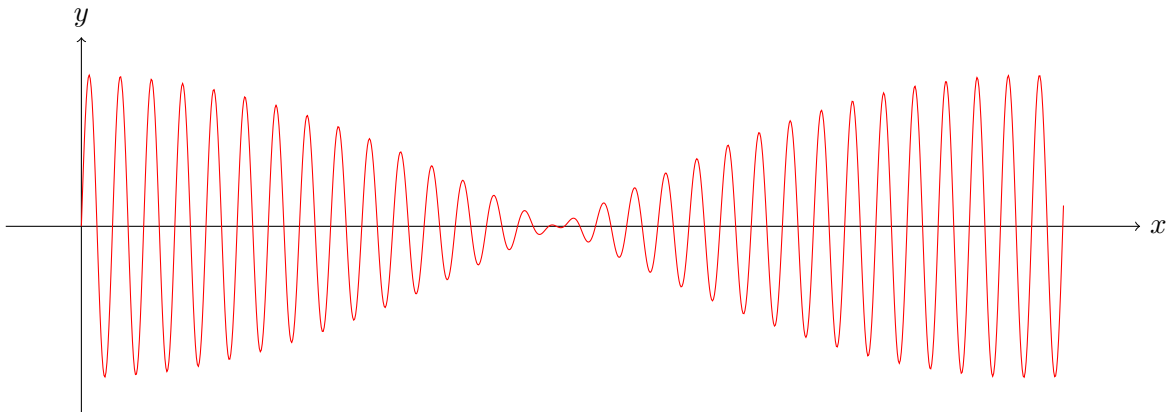
Battimenti

Giuseppe Sottile

25 ottobre 2019

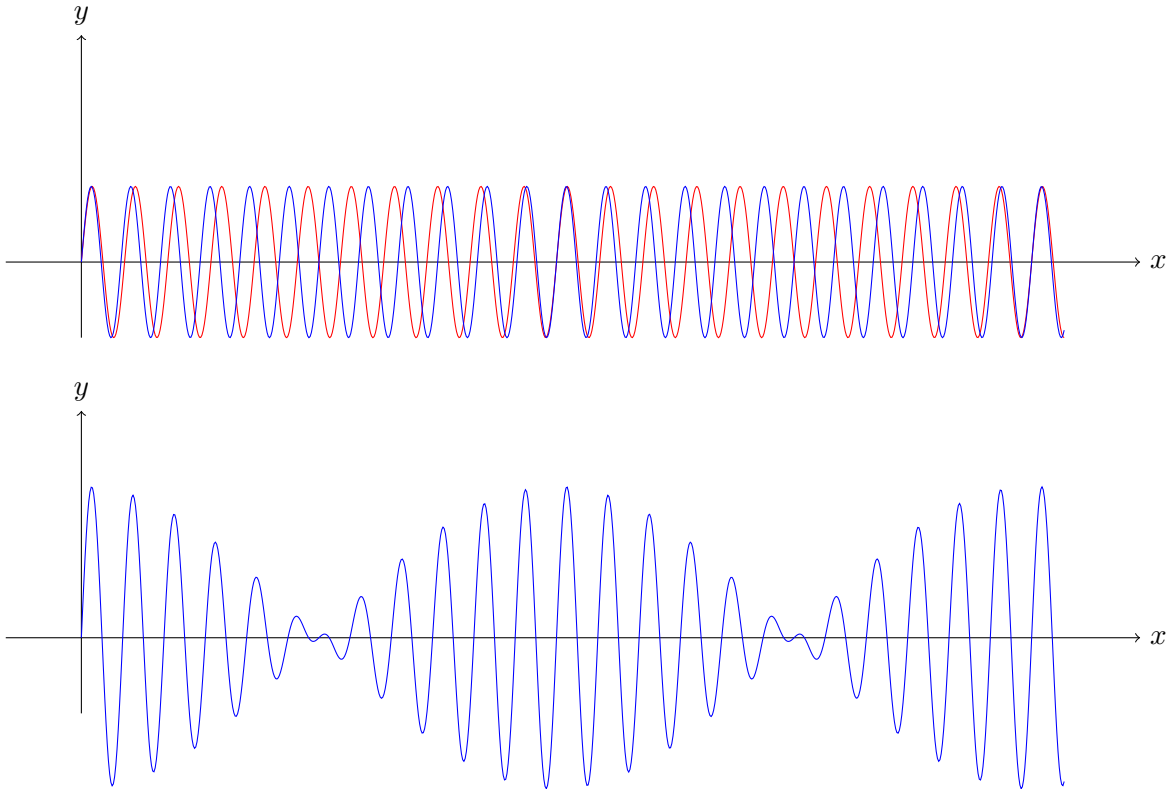
Se consideriamo due o più onde acustiche, possiamo studiare cosa accade quando esse si sovrappongono fisicamente. Il fenomeno prende il nome di interferenza acustica. Più in particolare, se queste onde, (ad esempio dei suoni), hanno frequenze simili (cioè differiscono di poco), si genera un fenomeno interessante noto con il termine "battimenti". In questo caso, non siamo in grado di percepire distintamente i due suoni ma percepiamo un unico suono simile a un battito il cui ritmo è dato, come vedremo, dalla differenza delle due frequenze originarie. Dimosteremo di seguito che due onde a pulsazione ω_1 ed ω_2 alla stessa ampiezza A risulteranno descritte dalla relazione:

$$2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$



1 Interferenza acustica

La figura mostra una rappresentazione grafica nel tempo del fenomeno. Un modo per generare i battimenti consiste nel prendere due diapason, a frequenze "quasi simili" ad esempio il primo libero ed il secondo munito di una massa in modo da abbassare di poco la sua frequenza di risonanza. Facendo risuonare i due diapason, le onde che si manifestano avranno un piccolo sfasamento che causerà un'interferenza variabile nel tempo, a cui corrisponderà una modulazione di ampiezza il cui "rintocco" è dato per l'appunto dalla frequenza di battimento. La figura in basso mostra quanto detto. Osservate che nei punti in cui l'interferenza è costruttiva, l'ampiezza aumenta, mentre nei punti in cui l'interferenza è distruttiva si annulla.



2 Frequenza di battimento

Consideriamo due sinusoidi pure elementari espresse dalle loro parametrizzazioni nel tempo aventi la stessa ampiezza A e pulsazioni ω_1 ed ω_2 relativamente.

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t)$$

$$y_2 = A \sin(\omega_2 t)$$

Per la sovrapposizione degli effetti, il suono risultante, o meglio, l'onda risultante sarà data dalla somma delle due espressioni:

$$y_1 + y_2 = A \sin(\omega_1 t) + A \sin(\omega_2 t)$$

$$A(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$$

Dalla trigonometria elementare, vi ricordo che la somma di due seni, si può esprimere attraverso le formule di prostaferesi, in particolare dalla prima formula, che fa al caso nostro.

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Utilizzando, quindi la prima formula di prostaferesi, ossia quella della somma di due seni, abbiamo la nostra onda acustica scritta in un modo equivalente ma diverso.

$$A(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\right)$$

Mettendo in evidenza il tempo t , osserviamo che l'onda risultante è data dal prodotto di un seno per un coseno.

$$A(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) = 2A \sin\left(\overbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}^{\omega}\right) \cos\left(\overbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}^{\Omega}\right)$$

Come detto, quando siamo in presenza di un fenomeno di interferenza, in generale, lo sfasamento del segnale somma non è costante ma è variabile nel tempo, in particolare, quando si ha la condizione:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Ossia quando le due onde sono quasi identiche si conclude che l'onda risultante avrà una frequenza pari a $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \equiv \omega$ ed un'ampiezza modulata dalla frequenza: $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \equiv \Omega$. Poiché il suono si annulla quando il flusso di volume d'aria è nullo e questo avviene due volte per ciclo si conclude che la frequenza di battimento è data da:

$$\omega_{batt} = 2 \left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| = 2\pi |f_1 - f_2|$$

da cui la frequenza si ottiene come di consueto dividendo la pulsazione per 2π .

$$f_{batt} = \frac{\omega_{batt}}{2\pi}$$

◇

3 Un paio di esempi

Vogliamo calcolare la frequenza di battimento di due sinusoidi di frequenze $f_1 = 530Hz$ ed $f_2 = 527Hz$.

$$f_{batt} = |f_1 - f_2| = 530 - 527 = 3Hz$$

Vogliamo calcolare la frequenza di battimento di due sinusoidi di pulsazioni $\omega_1 = 60\pi \frac{rad}{s}$ ed $\omega_2 = 50\pi \frac{rad}{s}$.

Ricordando il legame tra frequenza e pulsazione $f = \frac{\omega}{2\pi} \iff \omega = 2\pi f$ abbiamo che:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

$$f_{batt} = |f_1 - f_2| = \left| \frac{60\pi}{2\pi} - \frac{50\pi}{2\pi} \right| = |30 - 25| = 5Hz$$