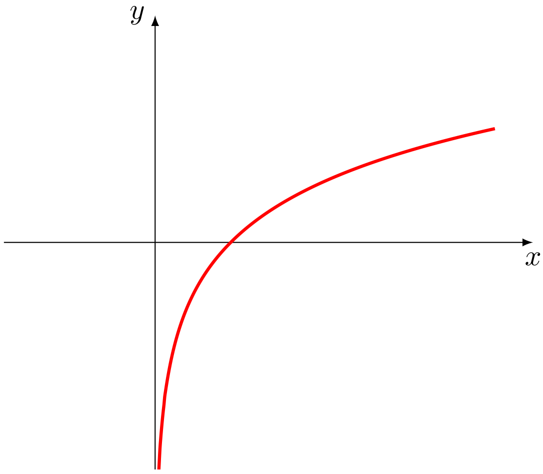
Logaritmi e decibel

Giuseppe Sottile

28 novembre 2019

Il nome decibel deriva dal suo inventore "Alexander Graham Bell". Tradizionalmente è prassi indicare il decibel con l'abbreviazione (dB) e con delle varianti a seconda del contesto in cui si opera. Si tratta di un'unità di misura inizialmente utilizzata in acustica per misurare l'intensità del suono. Ad oggi essa è largamente utilizzata in numerosi campi applicativi ed in particolare nel campo delle telecomunicazioni. Prima di addentrarci abbiamo bisogno di uno strumento matematico: "il logaritmo".



1 Logaritmi

Non si può mai comprendere a cosa ci riferiamo con l'appellativo decibel senza sapere cosa sono e come si usano i logaritmi. A tal proposito in questo paragrafo cercherò di descriverne sommariamente le loro caratteristiche di base e la loro definizione elementare.

1.1 Definizione di logaritmo

Consideriamo tre numeri di cui due li conosciamo ed il terzo è incognito. Indicheremo i numeri noti con le lettere a e b, mentre l'incognita com'è tipico in matematica, con x. Combinando questi numeri come potenze, basi ed esponenti si hanno sostanzialmente tre casi in cui la x può trovarsi:

- **Potenza** Se la x compare come risultato dell'elevamento di a a potenza b si tratta della definizione di potenza.
- **Esponenziale** Se la x compare "base incognita" si ha la definizione di radice $x = \sqrt[b]{a}$
- **Logaritmo** Infine se la x compare ad esponente, si definisce la funzione logaritmo che indichiamo con *log*.

In sostanza il logaritmo di un numero b rispetto ad una base a è l'esponente che devo dare ad a per ottenere b e si indica:

$$x = log_b(a)$$

Quessto significa che stiamo cercando quel numero che ci dice quante volte dobbiamo moltiplicare per se stessa la base b al fine di ottenere il numero a. Facciamo qualche esempio per capirci. Se voglio sapere qual è il logaritmo in base 2 di 16 sriverò:

$$x = log_2(16)$$

E' la risposta è banale. Si trata di 4, ossia $4 = log_2(16)$ e questo significa che se moltiplico il 2 per se stesso 4 volte ottengo 16

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

Giocando con i numeri possiamo costruire altri esempi

- $log_2(512) = 9 \iff 2^9 = 512$
- $log_{10}(100) = 2 \iff 10^2 = 100$
- $log_{10}(0,001) = log_{10}(\frac{1}{1000}) = -3 \iff 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$
- $log_3(3) = 1 \iff 3^1 = 3$
- $log_7(1) = 0 \iff 7^0 = 1$

Bisogna fare ora attenzione ad un paglio di osservazioni. La prima delle quali è certamente quella che si estrinseca rispetto all'ultimo esempio. Il logaritmo rispetto ad una qualunque base di 1 è 0. Questo è diretta conseguenza del fatto che qualsiasi numero non nullo elevato a 0 da come risultato 1. L'altra osservazione riguarda il fatto che se la base è uguale all'argomento il logaritmo è chiaramente pari ad 1, ma di questo ne parleremo più avanti.

◇ ◇ ◇

1.2 Proprietà dei logaritmi

Una volta definito che cos'è il logaritmo, possiamo con esso costruire un'algebra attraverso delle operazioni regolate da un insieme di proprietà che questi logaritmi debbono soddisfare

- **Logaritmo del prodotto** Il logaritmo rispetto ad una base a il cui argomento è un prodotto è la somma di due logaritmi aventi come base la stessa base a e come argomento i singoli fattori del prodotto di partenza:

$$log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c)$$

- **Logaritmo di una potenza** Il logaritmo in base a di una potenza b^c è pari al prodotto di c per il logaritmo in base a di b. Detto in latri termini se l'argomento di un logaritmo è una potenza, l'esponente può "uscire fuori dall'argomento.

$$log_a(b^c) = c \cdot log_a(b)$$

- **Logaritmo del reciproco** Il logaritmo in base a del reciproco di un numero b è pari all'opposto del logaritmo in base a di b. Questa proprietà si dimostra a partire dalla seconda, in quanto il reciproco si può ricondurre ad una potenza ad esponente negativo.

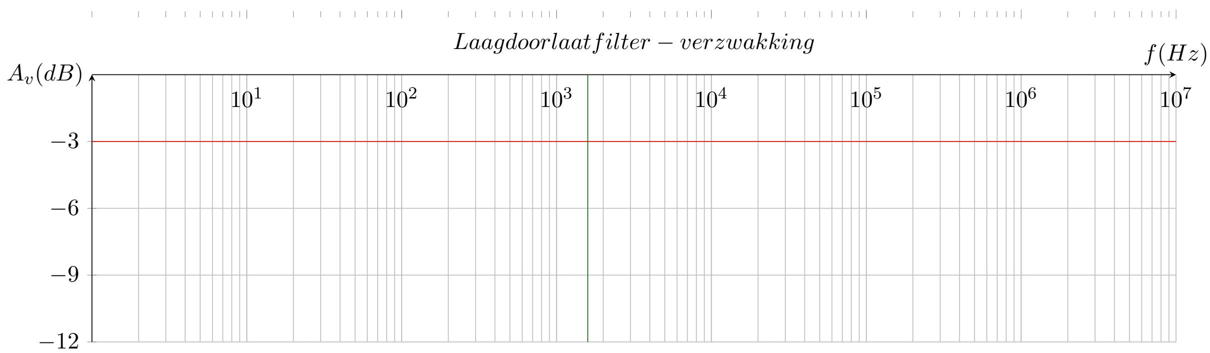
$$log_a\left(\frac{1}{b}\right) = log_a b^{-1} = -log_a(b)$$

1.3 La funzione logaritmo

Se immaginiamo di effettuare il calcolo del logaritmo per un qualunque numero strettamente positivo, possiamo costruire una curva detta funzione logaritmo. Esistono due tipologie di funzioni logaritmiche. Quella la cui base è maggiore di 1 il cui andamento è crescente raffigurato nella figura in alto e quella la cui base è compresa tra 0 ed 1. di dette funzioni:

◇◇◇

2 Scala logaritmica



3 Definizione di decibel

Per capire cosa è un decibel, ci servono soatanzialmente 2 ingredienti: il Bel (di cui il decibel ne è la decima parte) e da quì deriva il nome, ed il logaritmo. Assodato che sappiate cosa sia un logaritmo iniziamo col definire il Bel:

Il Bel indica una misura adimensionale. Supponiamo di voler misurare una grandezza X. Ci serve anzitutto considerare un riferimento, rispetto al quale prendiamo le misure. Ad esempio nel caso acustico questo riferimento potrebbe essere la soglia di udibiità in termini di pressione sonora. Si definisce bel il logaritmo in base 10 del rapporto tra la grandezza generica X e la grendezza di riferimento X_0, in formule:

$$X_{Bel} = log_{10}\frac{X}{X_0}[B]$$

In sostanza si ha 1 bel quando il logaritmo del rapporto è 10, ossia quando X è dieci volte X_0 infatti $log_{10}10 = 1$ Nella pratica, il bel è utilizzato relativamente in minima parte, a tal punto di introduce il decibel, ossia "il decimo di bel". Possiamo quindi con un abuso di linguaggio dire che:

$$1db = \frac{1}{10}B \iff 10db = 1B$$

Utilizzando la definizione di bel, possiamo esprimere tutto come:

$$X_{db} = 10log_{10}\frac{X}{X_0}[db]$$

Perciò, avro la misura di $1db$ quando l'argomento del logaritmo sarà elevato alla $\frac{1}{10}$, ossia quando il rappoto tra le due grandezze sarà circa $1,258925$, infatti

$$X_{db} = 10log_{10}\frac{X}{X_0}^{\frac{1}{10}} = 10\frac{1}{10}log_{10}\frac{X}{X_0}$$