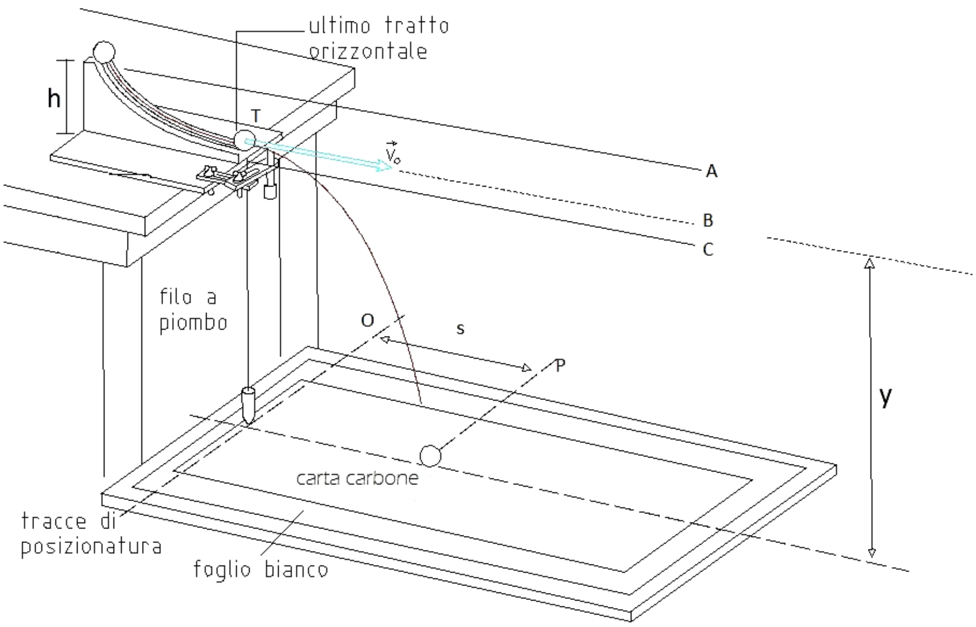
Conservazione dell'Energia meccanica

Giuseppe Sottile

16 dicembre 2020

La prima esperienza di laboratorio prevede la verifica sperimentale del principio di conservazione dell'energia meccanica. Questo principio afferma che l'energia meccanica si conserva, ossia per sistemi non dissipativi la variazione di tale grandezza è nulla.



1 L'esperimento

Un modo semplice per verificare il principio consiste nel far vedere che l'energia potenziale di un oggetto ad esempio una pallina (o una sferetta) si trasforma (trascurando gli attriti) tutta in energia cinetica quando questa viene lasciata cadere ed inoltre che queste due energie coincidono, in sostanza:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Essendo il campo gravitazionale centrale e quindi conservativo l'energia potenziale non dipende dal particolare percorso scelto. Questo ci consente di scegliere tra tutti i percorsi, quello da cui possiamo trarre delle informazioni essenziali per l'esperimento, cioè ad esempio un moto parabolico.

Se lasciamo cadere la sferetta su una guida curva di modo che la curvatura si nulla nel punto in cui la sferetta rimane in caduta libera, sappiamo, dalle proprietà del moto parabolico che in quel punto, la velocità v della sferetta è pari a:

$$v = \sqrt{\frac{gd^2}{2l}}$$

Dove $g = 9.82\frac{m}{s^2}$ è l'accelerazione di gravità, l è l'altezza del piano su cui è posata la guida (o meglio la quota per cui la sferetta cambia concavità nel moto) e d la gittata, ossia la distanza a cui cade al suolo nel momento in cui lascia la guida.

Questa scelta è in qualche modo correlata al fatto che conoscendo l'altezza h[1], possiamo verificare la validità del principio nel menbro sinistro, inoltre facendo più lanci, i dati tra una prova e l'altra risultano essere meno casuali[2].

2 Strumentazione ed Accorgimenti

Per lo svolgimento della prova ho realizzato una guida liscia in plastica curva cercando di attenermi il più possibile alle ipotesi suggerite dalla esercizio, ossia far si che la guida sia abbastanza orizzontale nel punto in cui la sferetta lascia la guida stessa e compie il suo moto parabolico, inoltre ho impiegato un filo a piombo per determinare il punto esatto corrispondente allo (zero) del metro visto che la misura si è svolta da terra. Di seguito l'elenco degli strumenti adoperati

1. Guida in plastica curva
2. Tavolo
3. Filo a piombo
4. Sferetta di metallo piena
5. Sostegno, morsa per guida

[1] punto in cui lasciamo cadere la sferetta

[2] Ad esempio si potrebbe lanciare la sferetta lungo un piano e calcolare come sopra la gittata, a patto di imprimere la stessa forza tra un lancio e l'altro

3 Svolgimento

Per ridurre i piccoli errori casuali intrinseci nella grezza strumentazione realizzata ad hoc[3] ho lasciato cadere la sferetta circa 10 volte da un'altezza fissa $h = 45cm$ ed ho calcolato la media $\overline{d}$, ottenendo un valore pari a $111.5cm$

$$\overline{d} = \sqrt{\frac{113 + 109 + 115 + 114 + 110 + 114 + 113 + 110 + 107 + 109}{10}} = \sqrt{\frac{1114}{10}} = 111.4cm$$

Questo valore rappresenta una stima grossolana del valore che assumerebbe la corrispondente distribuzione limite di Gauss se facessi un numero molto elevato di esperimenti, inoltre sappiamo che l'incertezza associata coincide con una deviazione standard σ_d, dove, in particolare il 68% rappresenta la probabilità che i valori per d rientrino nel range $111.4 \pm \sigma_d$.

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(d_i - \overline{d})} = \sqrt{\frac{66.4}{10}} \approx 2.57$$

$$\sigma_{\overline{d}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{10}} \approx 0.8$$

Un ulteriore errore commesso nella misura della distanza d, è subentrato nell'individuare il

centro esatto della caduta della sferetta. Impiegando della sabbia fine, la sferetta nell'urto dopo la caduta ha lasciato un segno dell'impatto. Non essendo individuabile il centro il diametro $2r$ potrebbe rappresentare una stima dell'errore casuale (es $1cm$).

Essendo tuttavia $\sigma_d > 2r$ ho convenuto scegliere come incertezza casuale la deviazione standard. Di conseguenza aggiungendo il contributo relativo all'errore strumentale di $1mm$ l'incertezza di d si puo stimare nel modo seguente:

$$\delta d = \sqrt{\sigma_{\overline{d}}^2 + (0.1)^2} \approx 0.8$$

Riassumendo ho ottenuto i seguenti valori a valle dell'esperimento (in metri):

$$\begin{cases} h = (45.3 \pm 0.1)cm \\ l = (81.2 \pm 0.1)cm \\ d = (111.4 \pm 0.8)cm \end{cases}$$

[3]anche lasciando cadere la sferetta con la mano si introduccono piccoli errori casuali

3.1 Test Chi-quadrato

Verifichiamo quanto i valori osservati distano dai valori attesi. La suddivisione ci porta ad avere 4 sottointervalli nella distribuzione di Gauss come si osserva in figura

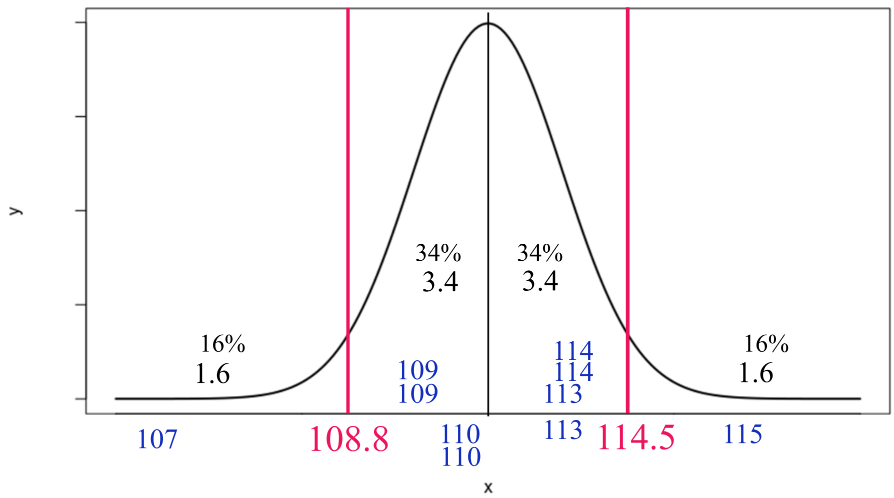


Figura 1: Suddivisione della gaussiana, valori attesi e valori osservati

I relativi valori sono riportati in tabella

k	Pk	$Ek = NP_k$	Ok
1	16%	1.6	1
2	34%	3.4	4
3	34%	3.4	4
4	16%	1.6	1

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} =$$

$$= \frac{(1.6-1)^2}{1.6} + \frac{(3.4-4)^2}{3.4} + \frac{(3.4-4)^2}{3.4} + \frac{(1.6-1)^2}{1.6} =$$

$$= 0.225 + 0.106 + 0.106 + 0.225 \approx 0.662$$

Figura 2: Alcune foto della strumentazione

3.2 Propagazione delle incertezze

Consideriamo la relazione.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Se sostituiamo il valore di $v = \sqrt{\frac{gd^2}{2l}}$ abbiamo la seguente relazione:

$$mgh = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{gd^2}{2l}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{gd^2}{2l}\right) = mg\frac{d^2}{4l}$$

$$h = \frac{d^2}{4l}$$

Per verificare la relazione bisogna calcolare la propagazione dell'errore. Un stima a priori dell'incertezza relativa è data da:

$$\frac{\delta\left(\frac{d^2}{4l}\right)}{\left|\frac{d^2}{4l}\right|} = 2\frac{\delta d}{|d|} + \frac{\delta l}{|l|} =$$

$$= 2\frac{0.8}{111.4} + \frac{0.1}{81.2} = 0.014 + 0.0012 = 0.015 \approx 1.5\%$$

3.3 Verifica e conclusioni

Sostituendo il valore nella relazione otteniamo

$$\frac{111.4^2}{4(81)} = 38.30$$

$$38.30 \pm \left(\frac{38.30 \cdot 1.5}{100}\right) = (38.30 \pm 0.6)cm$$

Il valore dell'altezza è $h = (45 \pm 0.09)cm$

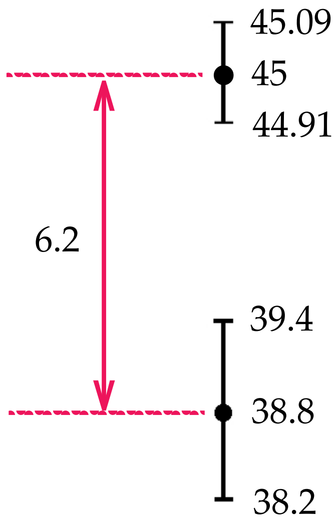


Figura 3: Intervallo di incertezze ottenuto

La discrepanza $|38.30-45| = 6.7cm$ ci suggerisce che i dati non sono compatibili in quanto l'errore è molto minore di tale valore. Possiamo concludere che il motivo è legato ad una **sottostima dell'errore** oppure molto probabilmente agli **attriti intrinseci** che incorrono nell'esperimento.