Misura della densità di un corpo

Giuseppe Sottile

15 dicembre 2020

In questo esperimento si vuole misurare la densità di un corpo solido. Si definisce densità ρ di un corpo, il rapporto tra la massa M ed il suo volume V

$$\rho = \frac{M}{V}$$

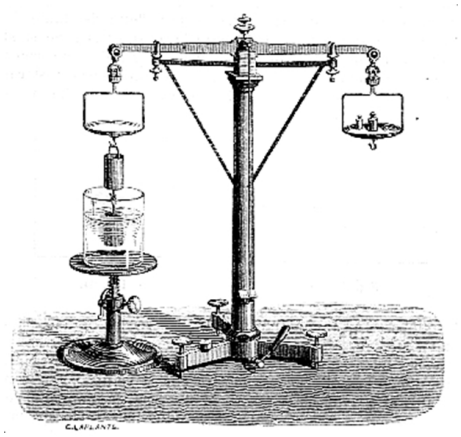

Figura 1: Una rappresentazione de "La bilancetta" di Galilei 1586

1 Sintesi

Si è scelto di suddividere l'esperienza in due fasi. Nella fase I, si procede ad una misura delle grandezze V ed M, se ne calcola il rapporto e si stima l'incertezza. Nella seconda fase, si procede facendo uso della cosiddetta bilancia idrostatica basata sul principio della spinta di Archimede. Infine si confrontano i risultati ottenuti in entrambi i metodi.

2 Primo metodo

2.1 Strumentazione

1. Calibro a nonio (Vernier) con presicione 0.05mm
2. Blocco in vetro
3. Bilancia pesavaligie con precisione 5gr fino a 10kg

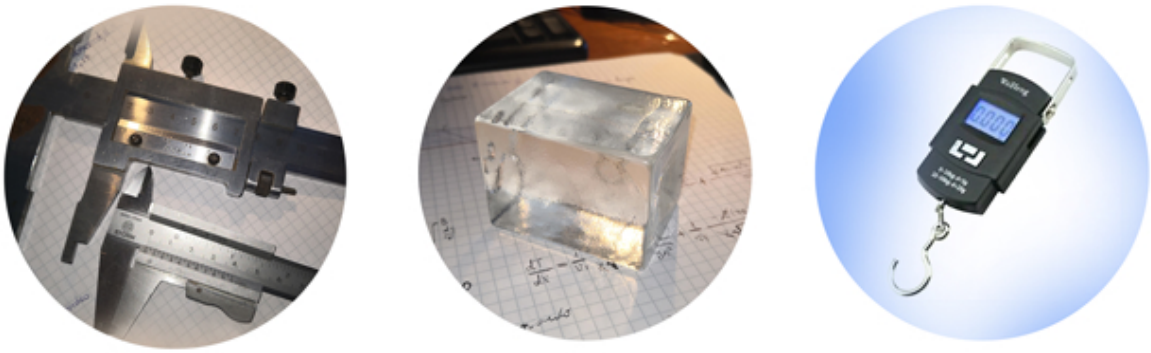

Figura 2: In ordine da sinistra a destra: Calibro, Blocco in vetro, Bilancia pesavaligie

2.2 La misura del volume

La scelta dell'oggetto da utilizzare per le misure è ricaduta su un blocco in vetro abbastanza regolare. In questo modo la misura del volume non ha richiesto particolari tecniche se non una semplice misura diretta con un'incertezza dell'ordine dello $0.05mm$. I valori corrispondenti in millimetri sono risultati essere i seguenti. Essendo il solido regolare ho effettuato una sola misura su ogni lato, ma avrei potuto effettuare diverse misurazioni sulle diverze facce per avere una migliore stima.

$$\begin{cases} l = (60.45 \pm 0.05)mm \\ h = (44.75 \pm 0.05)mm \\ d = (44.80 \pm 0.05)mm \end{cases}$$

2.3 La misura della massa in aria

Per la misura della massa si è impiegata una bilancia pesavaligie digitale con un intervallo di errore di $\pm 5gr$. Dopo aver effettuato la giusta taratura dello strumento, si è rilevato il seguente valore per la massa in aria:

$$M = (355 \pm 5)gr$$

2.4 Calcolo dell'errore e stima della densità

Secondo il primo metodo il valore della densità è dato dalla formula $\rho = \frac{M}{V}$, in cui si sceglie di esprimere la massa in gr ed il volume in cm^3: (in formule):

$$\rho_1 = \frac{M}{V} = \frac{M}{lhd} = \frac{355}{6.045 \cdot 4.475 \cdot 4.480} = 2.929 \frac{gr}{cm^3}$$

Essendo una misura indiretta afflitta intrinsecamente dalla propagazione degli errori, stimiamo l'incertezza relativa come segue (non avendo trattato l'errore casuale, si procede a determinare l'errore strumentale):

$$\frac{\delta\left(\frac{M}{l \cdot h \cdot d}\right)}{\left|\frac{M}{l \cdot h \cdot d}\right|} = \frac{\delta M}{|M|} + \frac{\delta l}{|l|} + \frac{\delta h}{|h|} + \frac{\delta d}{|d|} =$$

$$\frac{5}{355} + \frac{0.05}{60.45} + \frac{0.05}{44.75} + \frac{0.05}{44.80} = 0.014 + 0.0008 + 0.0011 + 0.0011 \approx 0.017 = 1.7\%$$

Si osserva che il contributo maggiore all'errore viene dalla bilancia, quindi per migliorare la stima dell'errore, si potrebbe utilizzare una bilancia più precisa.

Determiniamo ora l'incertezza assoluta come $\frac{2.929 \cdot 1.7}{100} = 0.05 \frac{gr}{cm^3}$
Quindi la nostra densità è data da:

$$\rho_1 = (2.929 \pm 0.05) \frac{gr}{cm^3}$$

2.5 Errore casuale

Ho scelto di non trattare l'errore casuale nella misura del volume per la regolarità del blocco in vetro. Nel caso in cui tale misura fosse nesessaria, si potrebbe procedere ad effettuare tante misurazioni eventualmente su più punti del solido, calcolare la miglior stima di ciascuna lunghezza come la relativa media $\overline{d} = \sum_i^N \frac{d_i}{N}$ e l'incertezza come deviazione standard (es. RMS degli scarti) $\sigma_d = \sqrt{\sum_i^N \frac{(d_i - \overline{d})^2}{N}}$ (dove sappiamo dalla teoria circa il 68% delle misure ivi ricade nel caso della distribuzione limite di Gauss).

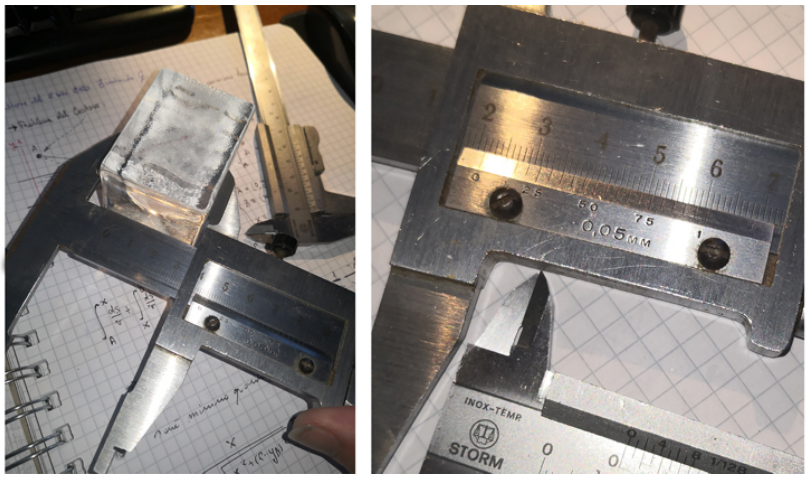

Figura 3: Misurazione mediante calibro

3 Metodo della bilancia idrostatica

Utilizzando il principio di Archimede riusciamo a trovare una relazione che lega la massa pesata in aria M, con la massa pesata in acqua m. Indichiamo con ρ_{H_2O} la densità dell'acqua pari al valore $\rho_{H_2O} = 0.997 \frac{gr}{cm^3}$ (si trascura l'incertezza).

$$\rho_2 = \rho_{H_2O} \frac{M}{M-m}$$

Per la determinazione della massa in acqua si è fatto uso della medesima bilancia pesavaligie, facendo attenzione a mantenere la stessa quota (z) rispetto al suolo tra una pesata e l'altra[1] (sia in aria che in acqua), si è pervenuti al seguente valore pesato in acqua:

$$m = (235 \pm 5) gr$$

Figura 4: Determinazione della massa mediante bilancia idrostatica

Sostituendo nella formula ed operando i calcoli si ottiene:

$$\rho_2 = \left(0.997 \frac{gr}{cm^3}\right) \frac{355}{355-235} \approx 2.958 \frac{gr}{cm^3}$$

Mentre l'incertezza relativa a priori è pari a:

$$\frac{\delta\rho}{|\rho|} = \frac{\delta M}{|M|} + \frac{\delta(M-m)}{|M-m|} = \frac{\delta M + \delta m}{|M-m|} =$$

$$= \frac{5}{355} + \frac{0.5+0.5}{355-235} = 0.014 + 0.00083 \approx 1.48 = 1.5\%$$

La misura secondo la bilancia idrostatica è quindi:

$$\rho_2 = (2.958 \pm 0.044) \frac{gr}{cm^3}$$

[1] La bilancia è stata ancorata con un cavo di messa a terra (con bassa elasticità) per impianti elettrici al soffitto.

3.1 Considerazioni finali

Possiamo valutare la discrepanza tra i due risultati ottenuti

$$|\rho_1 - \rho_2| = |2.929 - 2.958| = 0.029 \approx 0.03$$

Il valore ottenuto è minore dell'errore ottenuto, possiamo concludere che i dati (misure) sono compatibili.

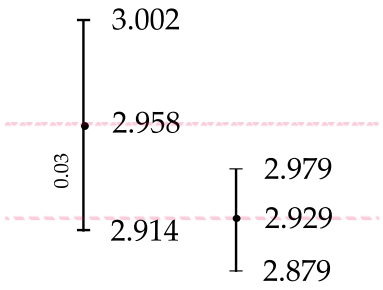

Figura 5: Discrepanza delle misure

Combinando i dati possiamo ottenere una miglior stima operando nel modo seguente:

$$\frac{\frac{2.929}{0.01^2} + \frac{2.958}{0.044^2}}{\frac{1}{0.01^2} + \frac{1}{0.044^2}} = 2.93 \frac{gr}{cm^3}$$