

# Capire la Relatività con un raggio di luce

Giuseppe Sottile  
< GIUX >



January 26, 2026

## Abstract

Mettiamo in evidenza l'equivalenza matematica tra le trasformazioni di Lorentz unidimensionali e le matrici di trasferimento dell'ottica gaussiana. Costruendo un sistema ottico equivalente basato su una lente divergente, forniamo una rappresentazione geometrica di contrazione delle lunghezze, dilatazione del tempo, relatività della simultaneità e composizione delle velocità. L'analogia proposta consente di visualizzare in modo intuitivo i principali effetti della relatività ristretta mantenendo il rigore formale.

## La matrice di Lorentz come trasformazione lineare dello spazio-tempo

Quando si passa da un sistema di riferimento inerziale  $R$  a un altro  $R'$ , in moto uniforme lungo l'asse  $x$ , la relatività ristretta ci dice che non basta più trasformare separatamente lo spazio e il tempo. Al contrario, le coordinate spazio-temporali di un evento devono essere considerate come le componenti di un unico oggetto. Indicando con  $(x, ct)$  le coordinate di un evento misurate in  $R$  e con  $(x', ct')$  quelle misurate in  $R'$ , il cambiamento di osservatore assume la forma di una **trasformazione lineare**:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & \frac{\frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{\frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}.$$

In questa espressione, il parametro  $\beta = u/c$  rappresenta la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento, mentre il fattore di Lorentz  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  quantifica quanto profondamente il moto relativo influenza la misura di spazio e tempo.

La struttura della matrice di Lorentz rende immediatamente evidente un punto concettuale centrale: nel passaggio da  $R$  a  $R'$ , le coordinate spaziali e temporali non rimangono separate, ma vengono **inevitabilmente mescolate**. È proprio questo mescolamento che dà origine agli effetti più caratteristici della relatività ristretta. Eventi che risultano simultanei per un osservatore possono non esserlo per un altro, lunghezze misurate lungo la direzione del moto si contraggono e gli intervalli di tempo si dilatano.

Nonostante questa profonda riorganizzazione delle coordinate, esiste una quantità che rimane invariata per tutti gli osservatori inerziali: l'intervallo spazio-temporale

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2.$$

Dal punto di vista matematico, questa invarianza si riflette nel fatto che il determinante della matrice di Lorentz è uguale a uno,

$$\det(M_L) = 1,$$

una proprietà che garantisce la conservazione della struttura causale dello spazio-tempo. In questa prospettiva, la trasformazione di Lorentz può essere interpretata come una **rotazione nello spazio-tempo**, non nel senso euclideo abituale, ma secondo una geometria iperbolica. Tutta la cinematica relativistica in una dimensione nasce, in ultima analisi, da questa semplice ma profonda trasformazione matriciale.

### Esempio: trasformazione delle coordinate da $R$ a $R'$

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali  $R$  e  $R'$ , con  $R'$  che si muove lungo l'asse  $x$  con velocità costante  $u = 0.6c$  rispetto a  $R$ . Introducendo il parametro  $\beta = u/c = 0.6$ , il fattore di Lorentz risulta

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.36}} = 1.25.$$

La matrice di Lorentz associata a questo moto relativo è quindi

$$M_L = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.25 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo ora che un evento avvenga, nel sistema  $R$ , alla posizione  $x = 300$  m e all'istante  $t = 1 \mu\text{s}$ . Moltiplicando il tempo per la velocità della luce, otteniamo  $ct = 300$  m, e dunque il vettore spazio-temporale dell'evento è

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Applicando la trasformazione di Lorentz si ricavano le coordinate dell'evento nel sistema  $R'$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}.$$

Dividendo per  $c$ , si ottiene infine  $t' = 2 \mu\text{s}$ . Lo stesso evento, osservato da  $R'$ , risulta quindi avvenire a una posizione più lontana e a un istante successivo: un effetto diretto del **mescolamento tra spazio e tempo** operato dalla trasformazione di Lorentz.

## Ottica gaussiana e approssimazione paraxiale

L'ottica gaussiana nasce come una semplificazione consapevole. L'obiettivo non è descrivere tutti i possibili raggi luminosi, ma concentrarsi su quelli che contano di più nei sistemi ottici centrati.

Si considerano, in particolare, i raggi che rimangono vicini all'asse ottico e che formano con esso **angoli piccoli**. Questa ipotesi prende il nome di **approssimazione paraxiale**.

Il motivo della sua efficacia è profondamente matematico. Quando gli angoli sono piccoli, le funzioni trigonometriche che compaiono nelle leggi dell'ottica possono essere sviluppate in serie di Maclaurin. Al primo ordine, tali sviluppi conducono alle approssimazioni

$$\sin \alpha \simeq \alpha, \quad \tan \alpha \simeq \alpha, \quad \cos \alpha \simeq 1.$$

In questo regime, le relazioni geometriche tra i raggi perdono la loro non linearità e diventano **relazioni lineari**.

È qui che avviene il passaggio concettuale fondamentale. L'ottica, da problema geometrico complesso, si trasforma in un sistema governato da leggi lineari, trattabili con strumenti algebrici semplici.

In questo contesto, la descrizione di un raggio luminoso si riduce all'essenziale. Su un piano perpendicolare all'asse ottico, il raggio è completamente determinato da due sole quantità. La prima è la distanza  $r$  dall'asse ottico, che ne indica la posizione trasversale. La seconda è l'angolo  $\alpha$  che il raggio forma con l'asse, che ne descrive la direzione di propagazione.

Ogni raggio può quindi essere rappresentato dalla coppia  $(r, \alpha)$ .

Per analizzare un sistema ottico si introducono due piani di riferimento. Un **piano di ingresso**, posto prima del sistema. Un **piano di uscita**, posto dopo di esso.

Un raggio entra nel sistema con coordinate  $(r, \alpha)$  sul piano di ingresso ed emerge con coordinate  $(r', \alpha')$  sul piano di uscita. Nell'approssimazione parassiale, la trasformazione che lega ingresso e uscita è lineare: posizione e inclinazione in uscita dipendono da combinazioni lineari delle corrispondenti grandezze in ingresso.

Questa linearità permette di racchiudere l'azione dell'intero sistema ottico in una matrice  $2 \times 2$ . È proprio questo formalismo matriciale a rendere l'ottica gaussiana così potente e, come si vedrà, a consentire un parallelo diretto con le trasformazioni di Lorentz della relatività ristretta.

## Matrici di trasferimento

Nel regime parassiale, un sistema ottico centrato agisce sui raggi in modo **lineare**. Per questo motivo è naturale descrivere ogni raggio mediante una coppia di variabili misurate su un piano perpendicolare all'asse ottico: la posizione trasversale  $r$  (distanza dall'asse) e l'inclinazione  $\alpha$  rispetto all'asse. Per trattare in modo uniforme anche i passaggi tra mezzi con indice di rifrazione diverso, è spesso conveniente usare come seconda variabile  $n\alpha$ , cioè l'angolo pesato dall'indice  $n$ . In questa notazione, l'azione di un sistema ottico tra un **piano di ingresso** e un **piano di uscita** si scrive tramite una **matrice di trasferimento** (o matrice **ABCD**):

$$\begin{pmatrix} r' \\ n'\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ n\alpha \end{pmatrix}.$$

I coefficienti  $A, B, C, D$  dipendono esclusivamente dagli elementi ottici attraversati (spazio libero, lenti, specchi, ecc.) e, una volta noti, permettono di ricavare  $(r', \alpha')$  in modo immediato.

**Esempio 1: propagazione in un mezzo uniforme.** Consideriamo un tratto di propagazione rettilinea di lunghezza  $d$  in un mezzo di indice  $n$ . In ottica parassiale, l'inclinazione non cambia, mentre la posizione trasversale cresce linearmente:

$$\alpha' = \alpha, \quad r' = r + d \tan \alpha \simeq r + d\alpha.$$

Poiché nel formalismo usiamo  $n\alpha$ , scriviamo  $\alpha = (n\alpha)/n$ , quindi

$$r' = r + \frac{d}{n}(n\alpha), \quad n\alpha' = n\alpha.$$

Questo corrisponde alla matrice

$$M_{\text{prop}}(d, n) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è

$$\det(M_{\text{prop}}) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \frac{d}{n} = 1.$$

**Lettura fisica:** la propagazione “inclina” la traiettoria nello spazio reale (cambia  $r$ ), ma non altera la variabile angolare (lascia invariato  $n\alpha$ ).

**Esempio 2: lente sottile in aria.** Una lente sottile di focale  $f$  non sposta il raggio nel piano della lente (la posizione resta la stessa), ma ne modifica l'inclinazione. In approssimazione parassiale, la relazione è

$$r' = r, \quad \alpha' = \alpha - \frac{r}{f}.$$

In aria  $n = n' = 1$ , dunque  $n\alpha = \alpha$  e

$$\begin{pmatrix} r' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad M_{\text{lente}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è

$$\det(M_{\text{lente}}) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{f}\right) = 1.$$

**Lettura fisica:** la lente “piega” il raggio (cambia  $\alpha$ ) in modo proporzionale alla distanza dall'asse  $r$ , senza cambiare la quota nel punto in cui lo attraversa.

**Esempio 3: composizione di elementi e determinante.** Un sistema ottico reale è spesso una sequenza di elementi. Se un raggio attraversa prima un elemento con matrice  $M_1$  e poi un elemento con matrice  $M_2$ , la matrice totale è il prodotto

$$M_{\text{tot}} = M_2 M_1.$$

Poiché  $\det(M_2 M_1) = \det(M_2) \det(M_1)$ , se ciascun elemento soddisfa  $\det(M_i) = 1$ , allora automaticamente

$$\det(M_{\text{tot}}) = 1.$$

Consideriamo, ad esempio, la sequenza **spazio libero**  $\rightarrow$  **lente**  $\rightarrow$  **spazio libero**, con propagazione in aria ( $n = 1$ ):

$$M_{\text{tot}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{propagazione}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{lente}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{propagazione}}.$$

Ognuno dei tre fattori ha determinante unitario, quindi anche  $M_{\text{tot}}$  soddisfa  $\det(M_{\text{tot}}) = 1$ , indipendentemente dai valori di  $d$  e  $f$ .

**Perché il determinante vale uno (significato).** In ottica gaussiana, nel regime parassiale e per sistemi ideali senza perdite, esiste una quantità che non viene “compressa” né “dilatata”: l’area occupata da un insieme di raggi nello spazio  $(r, n\alpha)$ , collegata alla conservazione dell’*étendue* (o area di spazio delle fasi). Una trasformazione lineare che conserva le aree deve avere determinante unitario. È per questo motivo che le matrici ABCD soddisfano in generale

$$AD - BC = 1.$$

Questa proprietà, oltre a essere un vincolo matematico, è ciò che rende il formalismo matriciale coerente e fisicamente significativo: concatenare elementi ottici equivale a moltiplicare matrici, senza mai violare la conservazione sottostante.

## Corrispondenza tra trasformazioni di Lorentz e matrici ottiche

A questo punto, il parallelismo tra relatività ristretta e ottica gaussiana emerge in modo naturale. In entrambi i casi, il cambiamento di sistema di riferimento — inerziale nella relatività, ottico nell’ottica gaussiana — è descritto da una **trasformazione lineare** che agisce su una coppia di variabili. Nella relatività ristretta unidimensionale, tali variabili sono le coordinate spazio-temporali  $(x, ct)$ , mentre nell’ottica gaussiana parassiale sono la posizione e l’inclinazione del raggio,  $(r, n\alpha)$ .

La trasformazione di Lorentz può essere scritta in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix},$$

dove  $\beta = u/c$  e  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Analogamente, un sistema ottico centrato è descritto da una matrice di trasferimento ABCD che collega le grandezze  $(r, n\alpha)$  misurate sul piano di ingresso a quelle  $(r', n\alpha')$  sul piano di uscita. In entrambi i casi, la trasformazione è caratterizzata da una matrice  $2 \times 2$  a **determinante unitario**, espressione matematica della conservazione di una quantità fondamentale: l’intervallo spazio-temporale nella relatività e l’*étendue* nell’ottica.

Questa identità strutturale consente di stabilire una corrispondenza diretta tra le due teorie: a ogni trasformazione di Lorentz unidimensionale può essere associato un opportuno sistema ottico parassiale, e viceversa. In particolare, il mescolamento tra spazio e tempo operato dalla trasformazione di Lorentz trova un equivalente ottico nel mescolamento tra posizione e inclinazione dei raggi prodotto da lenti e tratti di propagazione. È proprio questa corrispondenza formale che rende possibile visualizzare fenomeni relativistici — come la dilatazione

## La cavità ottica equivalente ad un boost di Lorentz

**Equivalenza operativa: un boost di Lorentz come sistema ottico (spazio–lente–spazio)** In relatività ristretta unidimensionale il cambio di coordinate tra  $R$  e  $R'$  può essere scritto come

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}}_{M_L} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

In ottica gaussiana, un raggio (o un intervallo tra due raggi/eventi) è descritto da una coppia  $(r, n\alpha)$  e la trasformazione ingresso–uscita è lineare:

$$\begin{pmatrix} r' \\ n\alpha' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{M_{GO}} \begin{pmatrix} r \\ n\alpha \end{pmatrix}, \quad AD - BC = 1.$$

**Matrice della cavità ottica a due specchi** Consideriamo una cavità ottica composta da due specchi  $M_1$  e  $M_2$ , separati da una distanza  $d$ , con raggi di curvatura  $R_1$  e  $R_2$ . Nel formalismo paraxiale, ogni elemento ottico è rappresentato da una **matrice di trasferimento**  $2 \times 2$ . In particolare, la **propagazione** in spazio libero su distanza  $d$  è descritta da

$$P(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre la riflessione su uno **specchio sferico** di raggio  $R$  (nel regime paraxiale) può essere rappresentata da

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

Poniamo il **piano di ingresso** immediatamente prima di  $M_1$  e consideriamo l'evoluzione del raggio da  $M_1$  verso  $M_2$ . La matrice totale della cavità per questo “passaggio” è il prodotto nell'ordine fisico corretto:

$$M_T = M(R_2) P(d) M(R_1).$$

**1) Primo prodotto:**  $P(d) M(R_1)$ . Calcoliamo

$$P(d) M(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + d \left(-\frac{2}{R_1}\right) & 1 \cdot 0 + d \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \left(-\frac{2}{R_1}\right) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$P(d) M(R_1) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2d}{R_1} & d \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

**2) Secondo prodotto:**  $M(R_2)[P(d)M(R_1)]$ . Ora moltiplichiamo a sinistra per la matrice dello specchio  $M_2$ :

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2d}{R_1} & d \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Eseguiamo il prodotto elemento per elemento:

$$A = 1 \left(1 - \frac{2d}{R_1}\right) + 0 \left(-\frac{2}{R_1}\right) = 1 - \frac{2d}{R_1},$$

$$B = 1 \cdot d + 0 \cdot 1 = d,$$

$$C = -\frac{2}{R_2} \left(1 - \frac{2d}{R_1}\right) + 1 \left(-\frac{2}{R_1}\right) = -\frac{2}{R_2} + \frac{4d}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1},$$

$$D = -\frac{2}{R_2} \cdot d + 1 \cdot 1 = 1 - \frac{2d}{R_2}.$$

Quindi la matrice totale risulta

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2d}{R_1} & d \\ -\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{4d}{R_1 R_2} & 1 - \frac{2d}{R_2} \end{pmatrix}.$$

**3) Osservazione sul determinante.** Per elementi ottici parassiali ideali, si ha  $\det M(R) = 1$  e  $\det P(d) = 1$ , dunque

$$\det(M_T) = \det(M(R_2)) \det(P(d)) \det(M(R_1)) = 1,$$

coerentemente con la conservazione dell'étendue nel formalismo ABCD.

**4) Eguaglianza con la matrice di Lorentz.** Per stabilire la corrispondenza con la relatività ristretta unidimensionale, si impone che la matrice di trasferimento della cavità  $M_T$  coincida con la matrice di Lorentz  $M_L$ . L'identificazione  $M_T = M_L$  implica l'uguaglianza elemento per elemento delle due matrici. In particolare, l'uguaglianza dei termini diagonali richiede

$$1 - \frac{2d}{R_1} = 1 - \frac{2d}{R_2} = \gamma,$$

mentre l'uguaglianza dei termini fuori diagonale impone

$$d = \gamma\beta, \quad -\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{4d}{R_1 R_2} = \gamma\beta.$$

La risoluzione di questo sistema algebrico conduce a un'unica soluzione fisicamente ammissibile, per la quale

$$R_1 = \infty, \quad R_2 < 0, \quad d = -\frac{\gamma - 1}{\gamma\beta}.$$

Ne segue che la trasformazione di Lorentz unidimensionale è otticamente equivalente a una cavità formata da uno specchio piano  $M_1$  e da uno specchio convesso  $M_2$ , separati da una distanza  $d$ . Questa identificazione completa il collegamento tra la struttura matematica della relatività ristretta e il formalismo delle matrici di trasferimento dell'ottica gaussiana.

**Dalla cavità ottica al sistema equivalente con lente divergente** La cavità ottica considerata nella sezione precedente, composta da uno specchio piano  $M_1$  e da uno specchio convesso  $M_2$ , realizza una trasformazione lineare descritta da una matrice ABCD a determinante unitario. Tale trasformazione è stata mostrata essere formalmente equivalente a una trasformazione di Lorentz unidimensionale. Tuttavia, una cavità risonante non costituisce il sistema più semplice per visualizzare l'azione della trasformazione, poiché il raggio luminoso subisce riflessioni multiple tra i due specchi.

Per rendere l'interpretazione geometrica più immediata, si può ricorrere a un procedimento standard dell'ottica gaussiana, noto come *unfolding* (srotolamento) della cavità. L'idea consiste nel sostituire le riflessioni successive con una propagazione equivalente lungo una direzione rettilinea, preservando la stessa matrice di trasferimento complessiva.

Nel regime parassiale, la riflessione su uno specchio sferico di raggio di curvatura  $R$  è descritta dalla matrice

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è formalmente identica a quella di una lente sottile di focale

$$f = \frac{R}{2},$$

a meno di una convenzione di segno. In particolare, uno specchio convesso ( $R < 0$ ) è otticamente equivalente a una **lente divergente** di focale negativa.

Poiché nel caso considerato il primo specchio soddisfa  $R_1 = \infty$ , esso non introduce alcun potere ottico e può essere eliminato nello srotolamento. L'intero effetto ottico della cavità è quindi concentrato nello specchio convesso  $M_2$ , che può essere sostituito da una lente divergente equivalente. La propagazione tra uno specchio e l'altro, di lunghezza  $d$ , diventa allora una propagazione in spazio libero prima e dopo la lente.

Il sistema ottico equivalente risulta pertanto composto da tre elementi disposti in sequenza:

- una propagazione in spazio libero di lunghezza  $d$ ,
- una lente sottile divergente di focale  $f$ ,
- una seconda propagazione in spazio libero di lunghezza  $d$ .

La matrice di trasferimento totale di questo sistema lineare è identica a quella della cavità originaria e, di conseguenza, alla matrice della trasformazione di Lorentz unidimensionale. Questo passaggio consente di reinterpretare il cambio di sistema di riferimento relativistico come l'azione di un semplice sistema ottico attraversato da un raggio luminoso una sola volta.

**Sistema ottico equivalente (“cavità srotolata”):** propagazione in spazio libero di lunghezza  $d$ , poi una lente sottile (qui divergente), poi ancora propagazione di lunghezza  $d$ . In aria ( $n = 1$ ) le matrici elementari sono

$$P(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix},$$

e la matrice totale è il prodotto

$$M_{\text{tot}} = P(d) L(f) P(d).$$

Sviluppiamo il prodotto **passo per passo**. Prima moltiplichiamo  $L(f)$  per  $P(d)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot d + 0 \cdot 1 \\ -\frac{1}{f} \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -\frac{1}{f} \cdot d + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}.$$

Poi moltiplichiamo a sinistra per  $P(d)$ :

$$M_{\text{tot}} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + d \left(-\frac{1}{f}\right) & 1 \cdot d + d \left(1 - \frac{d}{f}\right) \\ 0 \cdot 1 + 1 \left(-\frac{1}{f}\right) & 0 \cdot d + 1 \left(1 - \frac{d}{f}\right) \end{pmatrix}.$$

Quindi, in forma compatta,

$$M_{\text{tot}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & 2d - \frac{d^2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}.$$

Si noti subito che  $A = D$ , cioè la matrice è simmetrica sui diagonali, esattamente come  $M_L$ . Inoltre

$$\det(M_{\text{tot}}) = \left(1 - \frac{d}{f}\right)^2 - \left(2d - \frac{d^2}{f}\right) \left(-\frac{1}{f}\right) = 1,$$

come previsto per trasformazioni paraxiali ideali.

**Aggancio con Lorentz.** L'equivalenza con un boost di Lorentz 1D si ottiene imponendo che, nelle variabili adimensionali, la matrice ottica coincida con

$$M_L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

In particolare si richiede  $A = D = \gamma$  e che i termini fuori diagonale riproducano  $\gamma\beta$  (tenendo conto della scelta di scala  $r_0$ ). Una scelta (quella adottata nel lavoro) che realizza esattamente questa identificazione è

$$f = -\frac{1}{\gamma\beta}, \quad d = -\frac{\gamma-1}{\gamma\beta},$$

cioè una **lente divergente** (focale negativa) affiancata da due tratti di spazio libero della stessa lunghezza. Il messaggio concettuale è quindi netto: dato un boost di Lorentz unidimensionale, si può costruire un sistema ottico parassiale la cui matrice di trasferimento implementa la **stessa trasformazione lineare** tra coppie di variabili, rendendo visualizzabili con raggi e geometria effetti relativistici come dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze e perdita di simultaneità.

## Contrazione delle lunghezze

Nella relatività ristretta, la contrazione delle lunghezze è una conseguenza diretta delle trasformazioni di Lorentz. Consideriamo due eventi che avvengono simultaneamente nel sistema di riferimento ( $R$ ), ossia tali che  $\Delta t = 0$ , ma che risultano separati spazialmente nel sistema ( $R'$ ) da una distanza  $\Delta x' \neq 0$ . Applicando la trasformazione di Lorentz unidimensionale, si ottiene che la separazione spaziale misurata in ( $R$ ) è ridotta rispetto a quella misurata in ( $R'$ ), secondo la relazione

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Questo risultato descrive la misura, nel sistema ( $R$ ), della lunghezza  $L$  di un oggetto che possiede lunghezza propria  $L_0$  nel suo sistema di riposo ( $R'$ ). È essenziale sottolineare che una tale misura richiede la determinazione simultanea, nel sistema ( $R$ ), delle posizioni delle due estremità dell'oggetto, cioè una misura effettuata allo stesso istante di tempo in ( $R$ ). Ne segue la ben nota relazione

$$L = \frac{L_0}{\gamma},$$

che esprime l'effetto di contrazione delle lunghezze.

Nell'analogia ottica basata sul sistema equivalente con lente divergente, questa situazione trova una rappresentazione geometrica immediata. La separazione spaziale  $\Delta x'$  tra i due eventi nel sistema ( $R'$ ) è associata alla distanza del raggio dall'asse ottico sul piano di ingresso, pari a  $r = L_0$ . La condizione di simultaneità della misura nel sistema ( $R$ ) è invece rappresentata dal fatto che il raggio emergente dal sistema ottico sia parallelo all'asse ottico. In base alle leggi dell'ottica geometrica, tale condizione è soddisfatta solo se il raggio incidente possiede un'inclinazione tale che il suo prolungamento passi per il fuoco della lente divergente.

A causa della natura divergente della lente, la costruzione geometrica dei raggi mostra che l'altezza dell'immagine sul piano di uscita è minore dell'altezza

dell'oggetto sul piano di ingresso, ossia  $r' < r$ . Applicando il teorema di Talete alla configurazione ottica, si ottiene una relazione tra le lunghezze

$$\frac{L}{L_0} = \frac{f}{f + d},$$

dove  $f$  è la lunghezza focale della lente divergente e  $d$  la distanza di propagazione. Sostituendo le espressioni dei parametri del sistema ottico equivalente, si recupera esattamente la legge relativistica della contrazione delle lunghezze,

$$L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

In questo modo, la contrazione delle lunghezze emerge come una conseguenza puramente geometrica della trasformazione lineare implementata dal sistema ottico equivalente.

## Dilatazione del tempo

Nella relatività ristretta, la dilatazione del tempo emerge dal confronto tra intervalli temporali misurati in sistemi di riferimento inerziali in moto relativo. Consideriamo due eventi che avvengono nella stessa posizione spaziale nel sistema di riferimento ( $R'$ ), cioè tali che  $\Delta x' = 0$ , e che sono separati da un intervallo di tempo proprio  $\Delta t'$ . Applicando la trasformazione di Lorentz unidimensionale, si trova che un osservatore nel sistema ( $R$ ) misura tra gli stessi eventi un intervallo di tempo più lungo,

$$\Delta t = \gamma \Delta t',$$

che esprime il noto effetto di dilatazione del tempo, secondo cui un orologio in moto appare rallentato quando osservato da un sistema inerziale distinto.

Nell'analogia ottica basata sul sistema equivalente con lente divergente, la coincidenza spaziale dei due eventi nel sistema ( $R'$ ) è rappresentata da un raggio luminoso che entra nel sistema esattamente lungo l'asse ottico, ossia con coordinata trasversale nulla. La separazione temporale  $\Delta t'$  tra i due eventi è invece associata all'inclinazione iniziale del raggio rispetto all'asse ottico. Il raggio propaga inizialmente senza deviazioni nel mezzo omogeneo, fino a raggiungere la lente divergente, dove viene rifratto.

A causa della natura divergente della lente, l'angolo del raggio in uscita risulta necessariamente maggiore dell'angolo in ingresso. Nell'ambito dell'analogia, ciò significa che l'intervallo temporale osservato nel sistema ( $R$ ), rappresentato dall'angolo di uscita, è più grande dell'intervallo di tempo proprio  $\Delta t'$  rappresentato dall'angolo di ingresso. La dilatazione del tempo trova quindi una chiara interpretazione geometrica come amplificazione angolare.

Una semplice analisi geometrica della configurazione dei raggi consente di ricavare la relazione quantitativa tra gli angoli di ingresso e di uscita. Applicando

il teorema di Talete alla costruzione mostrata in Figura 3, si ottiene una relazione del tipo

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{f}{f + d},$$

dove  $f$  è la lunghezza focale della lente divergente e  $d$  la distanza di propagazione. Sostituendo le espressioni dei parametri del sistema ottico equivalente, si recupera esattamente la legge relativistica della dilatazione del tempo,

$$\Delta t = \gamma \Delta t'.$$

In questo modo, la dilatazione del tempo appare come una conseguenza diretta della geometria dei raggi in un sistema ottico parassiale.

## Simultaneità

Un'altra conseguenza fondamentale della relatività ristretta è la perdita di simultaneità tra eventi quando si cambia sistema di riferimento. Dalle trasformazioni di Lorentz segue infatti che, se due eventi sono simultanei in un sistema di riferimento ( $R'$ ), ossia tali che  $\Delta t' = 0$ , ma avvengono in posizioni spaziali diverse  $\Delta x' \neq 0$ , essi non risultano più simultanei in un altro sistema inerziale ( $R$ ). In particolare, nel sistema ( $R$ ) compare un intervallo di tempo non nullo tra i due eventi, proporzionale alla loro separazione spaziale in ( $R'$ ). Questo effetto esprime la relatività della simultaneità ed è uno degli aspetti più controintuitivi della teoria, poiché implica che le nozioni di passato, presente e futuro dipendono dallo stato di moto dell'osservatore.

Nell'analogia ottica basata sul sistema equivalente con lente divergente, la simultaneità in un dato sistema di riferimento è rappresentata da un raggio luminoso parallelo all'asse ottico nel piano che rappresenta quel sistema. Due eventi simultanei in ( $R'$ ), ma separati nello spazio, sono quindi modellati da un raggio che entra nel sistema ottico parallelo all'asse, ma a una distanza trasversale non nulla da esso. L'asse ottico funge implicitamente da riferimento, rappresentando uno degli eventi, mentre il raggio decentrato rappresenta l'altro evento.

Quando il raggio attraversa la lente divergente, la sua traiettoria non può rimanere parallela all'asse, poiché deve necessariamente passare per il punto focale immagine della lente. Di conseguenza, il raggio emerge dal sistema con una certa inclinazione rispetto all'asse ottico. Nell'ambito dell'analogia, tale inclinazione rappresenta la comparsa di un intervallo di tempo non nullo tra i due eventi nel sistema ( $R$ ): eventi che erano simultanei in ( $R'$ ) non lo sono più in ( $R$ ).

Il caso particolare in cui non si osserva alcuna perdita di simultaneità corrisponde al raggio che entra esattamente lungo l'asse ottico, ossia alla situazione in cui  $\Delta x' = 0$ . In questo caso, i due eventi coincidono spazialmente e risultano simultanei in tutti i sistemi di riferimento. La costruzione geometrica mette inoltre in evidenza che, in assenza di simultaneità nel sistema ( $R$ ), la separazione

spaziale tra gli eventi non può essere interpretata come una misura di lunghezza, distinguendo così chiaramente tra la semplice separazione spaziale di eventi e la misura della lunghezza di un oggetto, che richiede una determinazione simultanea delle sue estremità nello stesso sistema di riferimento.

## Additività relativistica delle velocità

Un'ulteriore conseguenza fondamentale delle trasformazioni di Lorentz è la legge relativistica di composizione delle velocità. Consideriamo un oggetto che si muove con velocità  $V'$  rispetto a un sistema di riferimento inerziale ( $R'$ ), il quale a sua volta si muove con velocità  $u$  rispetto a un altro sistema inerziale ( $R$ ). Nel sistema ( $R'$ ), l'oggetto percorre una distanza  $\Delta x' = V'\Delta t'$  in un intervallo di tempo  $\Delta t'$ , mentre nel sistema ( $R$ ) un osservatore misura una distanza  $\Delta x = V\Delta t$  e un intervallo di tempo  $\Delta t$ . Applicando le trasformazioni di Lorentz, si ottiene la ben nota relazione

$$V = \frac{V' + u}{1 + \frac{V'u}{c^2}},$$

che mostra come, a differenza della meccanica classica, le velocità non si sommano linearmente e come il valore della velocità della luce costituisca un limite invalicabile.

Nell'analogia ottica basata sul sistema equivalente con lente divergente, la velocità di un oggetto è rappresentata geometricamente dall'inclinazione di un raggio luminoso rispetto all'asse ottico. In particolare, la velocità è associata al rapporto tra la separazione spaziale e l'intervallo temporale, che nell'ottica gaussiana trova un analogo nel rapporto tra la distanza trasversale del raggio e il suo angolo di propagazione. Un raggio che entra nel sistema ottico con una certa inclinazione rappresenta dunque il moto dell'oggetto nel sistema ( $R'$ ).

Attraversando il sistema ottico, costituito da una propagazione in spazio libero seguita da una lente divergente e da un'ulteriore propagazione, il raggio subisce una trasformazione della sua inclinazione. Questa trasformazione geometrica codifica il passaggio dal sistema ( $R'$ ) al sistema ( $R$ ). A differenza di una semplice somma di angoli, la lente divergente combina le inclinazioni in modo non lineare, riflettendo il carattere non additivo delle velocità relativistiche.

Una semplice analisi geometrica della configurazione dei raggi, basata sul teorema di Talete, permette di stabilire una relazione quantitativa tra l'angolo di ingresso e quello di uscita del raggio. Sostituendo in tale relazione le espressioni dei parametri del sistema ottico equivalente, in particolare la distanza di propagazione e la lunghezza focale della lente divergente, si recupera esattamente la formula relativistica di composizione delle velocità. In questo modo, la legge di additività relativistica delle velocità emerge come un'ulteriore manifestazione della stessa trasformazione lineare che governa la dilatazione del tempo, la contrazione delle lunghezze e la perdita di simultaneità.

## References

- [1] M. A. Bouchene, *Illustrating Special-Relativity Phenomena via Gaussian Ray Optics*, Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité, FeRMI, Université de Toulouse and CNRS UMR 5589, Toulouse, France, arXiv:2601.15137.