Equazioni di Maxwell in forma covariante

Giuseppe Sottile

October 20, 2023

Abstract

Come è noto, tutta la teoria dell'elettromagnetismo è racchiusa in sole 4 meravigliose equazioni, scoperte da James Clerk Maxwell verso la metà del 1800 che descrivono tutti i fenomeni elettromagnetici. Come era stato osservato da Lorentz e Poincaré a differenza della meccanica classica queste equazioni sono intrinsecamente relativistiche e codificano in esse il fattore di Lorentz e la velocità della luce. In questa breve dissertazione presento le equazioni nella formulazione tensoriale per enfatizzarne la covarianza sotto trasformazioni di Lorentz.

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \frac{1}{2}\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0\end{gathered}}$$

1 Elettrodinamica

Nella versione tradizionale dell'elettrodinamica abbiamo 2 campi, $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ (campo elettrico) e $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ (campo di induzione magnetica). Questi campi dipendono sia dalle coordinate spaziali, che dal tempo. Essi sono campi cosiddetti vettoriali. Un campo vettoriale associa a ciascun punto dello spaziotempo un vettore. Se siamo nel vuoto, questi campi (dinamicamente) sono governati dalle Equazioni di Maxwell, che ne specificano la divergenza ed il rotore come segue - nel sistema di Gauss le equazioni assumono la seguente forma:

Legge di Gauss

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho \tag{1}$$

Solenoidalità del campo magnetico

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{2}$$

Legge di Faraday-Lenz

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

Legge di Ampére-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}J \tag{4}$$

Dove le costanti ϵ_0 e μ_0 sono rispettivamente la permittività del vuoto e la permeabilità magnetica. Queste due costanti combinate sotto radice quadrata portano inaspettatamente, con grande sorpresa alla velocità della luce nel vuoto

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \tag{5}$$

Questa formuletta è una prima dimostrazione di come le Equazioni di Maxwell catturano in profondità le proprietà della luce e del campo elettromagnetico.

È proprio questa stessa relazione, combinata con le equazioni, che ha portato Maxwell a teorizzare che la luce non è nient'altro che un'onda elettromagnetica che si propaga con velocità costante c nel vuoto; poi arrivo Hertz alcuni anni dopo la morte di Maxwell e dimostrò questo fatto sperimentalmente, più tardi Marconi avrebbe costruito la radio.

1.1 L'Equazione di Continuità

Oltre ad i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, nelle equazioni compaiono altre cose. $\rho(x, y, z, t)$ che è un campo scalare che descrive la (densità di carica elettrica)[1] e si misura in $\left[\frac{C}{m^3}\right]$ e $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ che è un campo vettoriale (densità di corrente elettrica)[2] e si misura in $\left[\frac{A}{m^2}\right]$. Questi due campi costituiscono le sorgenti del campo elettromagnetico. Se mettiamo insieme queste grandezze viene fuori un'altra equazione fondamentale, nota come l'equazione di conservazione della carica elettrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Questa equazione sostanzialmente afferma che la carica non può ne scomparire ne apparire dal nulla, se della carica diminuisce o aumenta vuol dire che si è spostata altrove o è pervenuta attraverso una corrente elettrica.

1.2 Potenziali

Da un punto di vista analitico, i campi elettrico e magnetico si possono definire attraverso dei potenziali, ossia dei campi scalari legati ad essi tramite le seguenti relazioni:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Dove $\Phi(x, y, z, t)$ è il potenziale scalare del campo elettrico, ed $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ è il potenziale vettore del campo induzione magnetica. In sostanza il campo elettrico essendo conservativo è il gradiente di qualche cosa[3], mentre il campo magnetico è il rotore di qualche cosa.

1.2.1 Onde

Le equazioni di Maxwell si presentano come un sistema di 4 equazioni differenziali alle derivate parziali lineari. Manipolando con un po di analisi vettoriale e qualche teorema si possono ridurre a due equazioni del secondo ordine (Equazioni delle Onde):

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

1.3 Forze

Una particella che si muove di velocità $\mathbf{v}$ in un campo elettromagnetico sarà soggetta alla forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{7}$$

[1] Il campo densità volumetrica di carica ci dice come le cariche sono distribuite nello spazio
[2] Il campo densità di corrente elettrica ci dice come le cariche si muovono nello spazio
[3] a parte un segno meno.

2 Quadrivettori

Le quantità vettoriali che appaiono nelle Equazioni di Maxwell sono dei 3-vettori, ma il nostro tensore elettromagnetico è un oggetto a 4 dimensioni[4]. Dobbiamo definire le versioni 4D dei vettori J e dei potenziali.

2.0.1 Quadrigradiente

Supponiamo di considerare un campo scalare dipendente dalle coordinate spazio-temporali $\Phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$, che nel contesto della relatività ristretta ad esempio potremmo rinominare più convenientemente con $\Phi(ct, x, y, z)$. Indicheremo le derivate parziali fatte rispetto a componenti controvarianti e covarianti con le seguenti notazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial^\mu \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial_\mu$$

Possiamo definire il seguente quadrivettore le cui componenti sono le derivate parziali rispetto alle coordinate spaziotemporali x^0, x^1, x^2, x^3:

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix}$$

A queste quantità daremo il nome di quadri-gradiente controvariante e covariante rispettivamente. E' facile dimostrare che se applichiamo il quadri-gradiente ad un campo controvariante, si ottiene un oggetto covariante e viceversa, se lo applichiamo ad un oggetto covariante si ottiene qualcosa di controvariante:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \Phi \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} = \partial^\mu \Phi$$

La forma differenziale esatta di Φ sarà quindi esprimibile nelle due forme:

$$d\Phi(x) = \partial_\mu \Phi dx^\mu = \partial^\mu \Phi dx_\mu$$

2.0.2 Quadridivergenza

Consideriamo un campo $A_\mu(x)$ quadri-vettoriale. Se calcoliamo il quadri-gradiente covariante del campo contraendo gli indici otteniamo la quadri-divergenza:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = \partial^\mu A_\mu(x)$$

Che è un campo scalare, ossia un tensore di rango 0 invariante. Se infatti applichiamo la definizione mediante il quadrigradiente possiamo scrivere agilmente nella versione covariante:

[4] Il tensore è di tango 2, ma nello spazio a 4 dimensioni esso assume la forma di una matrice 4×4.

$$\partial_\mu A^\mu = \langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \rangle = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}$$

La cosa si fa interessante se si prova a calcolare l'oggetto $\partial_\mu \partial^\mu$. Risulta facile convincersi che si tratta del d'Alembertiano espresso in notazione quadritensoriale.

$$\partial \cdot \partial = \partial_\mu \partial^\mu = \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix} \rangle =$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box$$

2.0.3 Quadricorrente

Iniziamo a trasformare il vettore J. Lo chiameremo **quadricorrente**. Nelle equazioni di Maxwell le sorgenti del campo elettrico e del campo magnetico sono rappresentate dalla densità di carica ρ e dalla densità di corrente $J = \rho v$, possiamo combinare insieme le due quantità e costruire un nuovo vettore a quattro componenti.

$$J^\mu = \big(\rho c, \mathbf{J}\big) = \big(\rho c, J_x, J_y, J_z\big) \tag{8}$$

2.0.4 Quadripotenziali

Per quanto riguarda i potenziali Φ ed $\mathbf{A}$, essi possono essere considerati come componenti del 4-vettore del potenziale [5]:

$$A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right) = \left(\frac{\Phi}{c}, A_x, A_y, A_x\right) \tag{9}$$

Si Potrebbe essere tentati di trasformare campo elettrico e campo magnetico in altrettanti quadrivettore elettrico e quadrivettore magnetico, ma essi si rivelano essere le componenti di un nuovo oggetto che si scopre essere un tensore di rango due: il tensore elettromagnetico di Faraday.

[5] il fattore c è essenziale per rendere le unità delle componenti del vettore uguali tra loro, come il lettore può verificare, lo stesso vale per il vettore quadri-corrente.

3 Il Tensore Elettromagnetico di Faraday

Nelle Equazioni di Maxwell i campi **E** e **B** compaiono separatamente. Nella realtà questa separazione non esiste. Esistono tuttavia dei casi in cui possono manifestarsi effetti con una predominanza magnetica o elettrica. Ad esempio in un magnete l'effetto magnetico è maggiore che in una sfera carica. Come possiamo unire insieme entrambi i campi? Come vedremo un modo intelligente di combinarli consiste nell'osservare che abbiamo 3 componenti del campo elettrico: E_x, E_y, E_z indipendenti e tre del campo magnetico B_x, B_y, B_z indipendenti, un'oggetto invariante contenete esattamente le 6 componenti elettromagnetiche è un tensore antisimmetrico di rango 4. Introduciamo ora il seguente oggetto chiamato **Tensore Elettromagnetico** o anche spesso **Tensore di Faraday** indicato con $F_{\mu\nu}$ e definito nel modo seguente

$$F^{\mu\nu} \stackrel{d}{=} \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Questo tensore, è per sua natura, dalla definizione antisimmetrico, cioè scambiando gli indici, cambia di segno: $F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}$, inoltre come vedremo il tensore si presenta come una matrice 4×4 con la seguente configurazione:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Come visto, il tensore è di rango quattro ed è antisimmetrico. Un tensore siffatto avrà la diagonale nulla ed i componenti F_{ij} con $i \neq j$ saranno opposti: $F_{ij} = -F_{ji}$ ed inoltre solo 6 saranno indipendenti

$$\begin{bmatrix} 0 & * & \clubsuit & O \\ * & 0 & -\aleph & \diamond \\ -\clubsuit & \aleph & 0 & -\star \\ -O & -\diamond & \star & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & * & -\clubsuit & -O \\ * & 0 & \aleph & -\diamond \\ \clubsuit & -\aleph & 0 & \star \\ O & \diamond & -\star & 0 \end{bmatrix}$$

Come vedremo questo è ciò di cui abbiamo bisogno[6] per unificare i campi elettrico e magnetico in forma covariante. [7] In sostanza, riassumendo:

$$F^{ii} = 0 \qquad F^{i0} = E^i \qquad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \tag{12}$$

[6]Oltre agli strumenti del calcolo tensoriale

[7]In Relatività Ristretta si adopera la convenzione della velocità della luce, per qui il tensore risulta spesso definito nel modo seguente (dividendo tutto per c. Si tratta di una convenzione tipica della RR:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & \frac{B_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ \frac{E_y}{c} & -\frac{B_z}{c} & 0 & \frac{B_x}{c} \\ \frac{E_z}{c} & \frac{B_y}{c} & -\frac{B_x}{c} & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Applicando la definizione:

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0} = -\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^0} =$$

$$= -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial x^0} = -(\nabla\Phi)^i - \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}$$

Confrontando con i potenziali

$$F^{i0} = E^i$$

Per le componenti restanti abbiamo invece ad esempio:

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = -\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = -(\nabla \times A)^3$$

Confrontando con i potenziali

$$F^{12} = -(\nabla \times A)^3 = -B^3$$

Stesso discorso per le componenti restanti[8]

Possiamo ora facilmente passare al tensore controvariante innalzando gli indici attraverso la contrazione con il tensore metrico:

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} \tag{13}$$

Il tensore controvariante si può verificare avrà le componenti del campo elettrico opposte, mentre il campo magnetico risulterà identico, questo fatto lo vedremo più avanti.

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

4 Equazioni di Maxwell

Le Equazioni di Maxwell, appaiono nella forma:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$$

[8]provare come esercizio a ricavare le componenti.

4.0.1 Lo pseduo 4-Tensore di Levi Civita

Lo pseudo quadritensore di Levi-Civita è la versione quadridimensionale del ben noto simbolo di Levi-Civita ϵ_{ijk} a tre indici. NElla sua versione controvariante presenta 4 indici e si definisce nel modo seguente:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 0 & \text{se 2 o più indici sono uguali} \\ 1 & \alpha\beta\gamma\delta = 0123 \text{ (o permutazione pari)} \\ -1 & \alpha\beta\gamma\delta = 0123 \text{ (o permutazione dispari)} \end{cases} \tag{15}$$

4.0.2 Equazione di Continuità

Prendiamo la prima delle equazioni in forma covariante e deriviamo ambo i membri mediante ∂_ν:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu$$

Se immaginiamo che il tensore $F^{\mu\nu}$ sia sufficientemente regolare[9], possiamo invertire l'ordine di derivazione e considerare l'oggetto $\partial_\nu \partial_\mu$ completamente simmetrico, ma siccome $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$[10], il risultato sarà lo scalare nullo, in sostanza avremo che:

$$\frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu = 0$$
$$\partial_\nu J^\nu = 0$$

Questa è l'equazione di continuità nella forma covariante, in cui la quadridivergenza della quadricorrente[11] è sempre zero (Questo mostra che le equazioni di Maxwell implicano la conservazione locale della carica elettrica). Infatti se esplicitiamo l'equazione:

$$\partial_\nu J^\nu = 0 = \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c\rho \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{c}\frac{\partial c\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

[9] i fisici spesso suppongono che questo sia vero

[10] la contrazione di un tensore completamente simmetrico con uno antisimmetrico è sempre zero

[11] J contiene le sorgenti dei campi