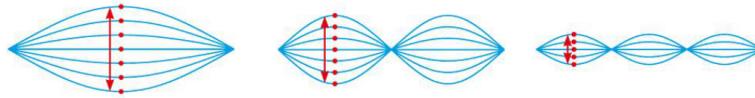


Spettro delle armoniche in una corda vibrante

Giuseppe Sottile

18 maggio 2021



1 Abstract

In questa mini dissertazione si studia lo spettro di una corda vibrante tenendo conto delle condizioni iniziali della corda stessa e delle condizioni al contorno. Si procede per via empirica, misurando lo spettro e si mostrano le corrispondenze con le armoniche estratte dall'integrale di Fourier.

2 Keywords

Risonanza, Onde stazionarie, Dirichlet, D'Alembert, Corda, Modi, Frequenze

◇

3 Materiale

- Smartphone Mate 10 Pro BLA-L09 con Sistema operativo Android 10 - 6Gb RAM, Processore HiSilicon Kirin 970.
- Applicazione PhyPhox con funzione FFT
- Programma Excel/Scidavis
- Elastico
- Scatola di cartone
- Metro per distanze o righello
- Chitarra classica

4 Introduzione

4.1 Una sola equazione per tutte le onde

Una delle scoperte più interessanti della fisica matematica consiste nel fatto che tutti i fenomeni di tipo vibrante (oppure ondulatorio), dalle onde elettromagnetiche, alle onde acustiche e/o meccaniche; rispondono o meglio, verificano una relazione matematica conosciuta tra gli addetti ai lavori come l'Equazione di D'Alembert (della corda vibrante).

Si tratta di una equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine iperbolica intuitivamente molto semplice e concisa ed aggiungo anche bella da vedere.

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

Questa semplice equazione racchiude tutta l'essenza dei fenomeni ondulatori. In sostanza l'equazione impone la regola a cui le eventuali soluzioni devono obbedire, regola descritta dall'operatore di Laplace che opera nello spazio e dalla derivata parziale nel tempo. La relazione scritta come sopra è un modo elegante di compattare un'espressione altrimenti più ingombrante come la seguente:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

Dove, il gruppo delle tre derivate seconde spaziali, prende il nome di "operatore Laplaciano". D'altro canto si potrebbe operare al contrario, portando l'equazione ad una forma super-concisa (introducendo l'operatore D'Alambertiano $\square = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ nel modo seguente:

$$\square \Phi = 0$$

La grandezza Φ , che compare nell'equazione rappresenta la nostra grandezza ondulatoria, ad esempio la pressione in un mezzo o ad esempio la quota di un elementino di corda di lunghezza infinitesima dl .



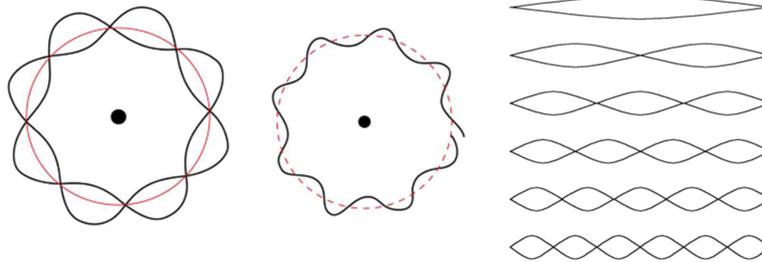
4.2 Onde stazionarie

Un'onda stazionaria è caratterizzata dal fatto di essere vincolata, rispetto ad un'onda pura. Un esempio concreto di onda stazionaria è quello di una corda di chitarra o di violino, ma anche quello della membrana vincolata ai bordi¹. Imponendo delle opportune condizioni al contorno di Dirichlet e delle condizioni iniziali², il problema della determinazione di una soluzione all'equazione d'onda ci porta a delle soluzioni del tipo: ³

$$\Phi(x, y) = \sum_n a_n \text{sen} \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \cos \left(\frac{\pi n}{L} t \right)$$

Dove i coefficienti a_n si possono determinare a partire dalla relazione di Fourier, imponendo una forma iniziale alla corda.

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \text{sen}(k_n x) dx$$



¹in quel caso l'onda è bidimensionale

²Il problema ben posto è noto come problema di Cauchy-Dirichlet

³Si osserva una separazione delle variabili x e t , caratteristica delle onde stazionarie

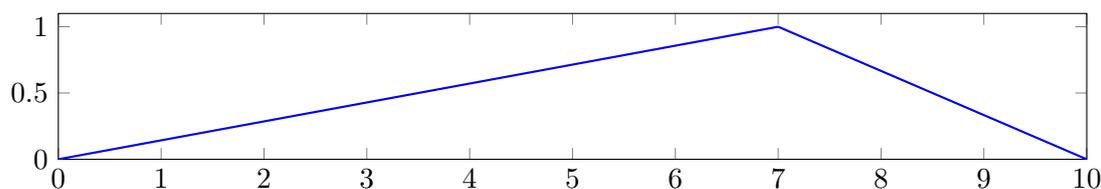
5 Procedimento

Si procede, impostando le condizioni iniziali, ossia scegliendo un opportuno punto x_0 di "tocco della corda"; inoltre con Δ_u si indica l'altezza della corda rispetto alla posizione di equilibrio, la funzione che modella questa situazione è definita di seguito "a tratti". Il grafico riporta un esempio di scelta $x_0 = 7; L = 10$.

5.1 L'integrale di Fourier

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{x_0} \Delta_u, & 0 < x < x_0 \\ \left(1 - \frac{x-x_0}{L-x_0}\right) \Delta_u, & x_0 < x < L \end{cases}$$

◇



$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\xi) \text{sen}(k_n \xi) d\xi$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^{x_0} \left(\frac{\xi \Delta u}{x_0}\right) \text{sen}(k_n \xi) d\xi + \frac{2}{L} \int_{x_0}^L \left(1 - \frac{\xi - x_0}{L - x_0}\right) \text{sen}(k_n \xi) d\xi$$

◇

Consideriamo il primo dei due integrali:

$$\frac{2\Delta u}{Lx_0} \int_0^{x_0} \xi \text{sen}(k_n \xi) d\xi \quad (I)$$

Essendo un integrale della forma $\int \xi \text{sen}(k\xi) d\xi$, con $k \in \mathbb{R}$ possiamo applicare il procedimento di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta u}{Lx_0} \int_0^{x_0} x \text{sen}(k_n x) dx &= \frac{2\Delta u}{Lx_0} \left[- \int_0^{x_0} 1 \cdot \left(\frac{-\cos(k_n x)}{k_n}\right) dx + \left[-x \cdot \frac{\cos(k_n x)}{k_n} \right]_0^{x_0} \right] = \\ &= \frac{2\Delta u}{Lx_0} \left[\frac{1}{k_n} \int_0^{x_0} \cos(k_n x) dx - \frac{x_0}{k_n} (\cos(k_n x_0)) \right] = \\ &= \frac{2\Delta u}{Lx_0} \left[\frac{1}{k_n} \left[\frac{\text{sen}(k_n x)}{k_n} \right]_0^{x_0} - \frac{x}{k_n} \cos(k_n x) \right] = \\ &= \frac{2\Delta u}{Lx_0} \frac{\text{sen}(k_n x_0) - k_n \cos(k_n x_0)}{k_n^2} \end{aligned} \quad (1)$$

◇

Per quanto riguarda il secondo integrale, possiamo dapprima semplificare il termine razionale $\left(1 - \frac{x-x_0}{L-x_0}\right)$, per ricondurci ad un integrale della forma di cui sopra. Da semplici regole algebriche abbiamo:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x-x_0}{L-x_0}\right) &= \left(\frac{L-x_0-x+x_0}{L-x_0}\right) = \\ &= \left(\frac{L-x}{L-x_0}\right) = \frac{L}{L-x_0} - \frac{x}{L-x_0} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'integrale

$$\begin{aligned} &\frac{2\Delta u}{L} \int_{x_0}^L \left(1 - \frac{x-x_0}{L-x_0}\right) \text{sen}(k_n x) dx = \\ &= \frac{2\Delta u}{L} \int_{x_0}^L \frac{L}{L-x_0} \text{sen}(k_n x) dx - \frac{2\Delta u}{L} \int_{x_0}^L \frac{x}{L-x_0} \text{sen}(k_n x) dx \end{aligned}$$

Di nuovo, risolviamo un integrale per volta (tralasciamo per il momento la costante a prodotto $\frac{2\Delta u}{L}$, risordandoci di aggiungerla alla fine:

$$\int_{x_0}^L \frac{L}{L-x_0} \text{sen}(k_n x) dx = \frac{L}{L-x_0} \left[\frac{-\cos(k_n x)}{k_n} \right]_{x_0}^L = \frac{k_n L}{L-x_0} \left(\frac{-\cos(k_n L) + \cos(k_n x_0)}{k_n^2} \right)$$

Per il secondo integrale:

$$\begin{aligned} - \int_{x_0}^L \frac{x}{L-x_0} \text{sen}(k_n x) dx &= \frac{-1}{L-x_0} \int_{x_0}^L x \text{sen}(k_n x) dx = \\ &= \frac{1}{L-x_0} \left(\frac{-\text{sen}(k_n x) + kL \cos(k_n L) + \text{sen}(k_n x_0) - k_n x_0 \cos(k_n x_0)}{k_n^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Sommando i due risultati ottenuti e tenendo conto della costante a prodotto $\frac{2\Delta u}{L}$ otteniamo l'espressione

$$\frac{2\Delta u}{L} \frac{\cos(k_n x_0)(x_0 - L)k_n + \text{sen}(k_n L) - \text{sen}(k_n x_0)}{k_n^2(x_0 - L)}$$

Che sommata al valore del primo integrale ci porta finalmente al risultato complessivo del generico coefficiente di Fourier, espresso dalla seguente relazione:

$$a_n = \frac{2\Delta u}{k_n^2} \frac{\text{sen}(k_n x_0)}{x_0(L-x_0)} \quad (3)$$

5.2 Configurazioni per le condizioni iniziali

Vediamo ora, come cambiando il punto in cui pizzichiamo la corda, si possono "eccitare" i diversi modi di oscillazione intrinseci dell'onda stazionaria. Se scegliamo ad esempio un valore pari a $\frac{L}{2}$ per x_0 , il generico coefficiente assume la seguente forma: ricordando che ($k_n = \frac{n\pi}{L}$):

$$\begin{aligned} a_n|_{x_0=\frac{L}{2}} &= \frac{2\Delta_u}{k_n^2} \left(\frac{\text{sen}\left(k_n \frac{L}{2}\right)}{\frac{L}{2}\left(L - \frac{L}{2}\right)} \right) = \frac{2\Delta_u}{k_n^2} \frac{\text{sen}\left(k_n \frac{L}{2}\right)}{\frac{L}{4}} = \\ &= \frac{2\Delta_u}{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}} \frac{4}{L^2} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{8\Delta_u}{\pi n^2} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \end{aligned}$$

◇

Essendo l'argomento del seno $\frac{\pi n}{2}$, per questo tipo di configurazione possiamo dire che il coefficiente si annulla per valori pari di n , infatti se $n = 2k, k \in Z$, allora $\text{sen}\left(\frac{\pi 2k}{2}\right) = \text{sen}(k\pi) = 0$.

◇◇

Scegliendo invece un valore pari a $x_0 = \frac{L}{3}$, l'espressione diviene

$$= \frac{2\Delta_u}{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}} \frac{9}{2L^2} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \frac{9\Delta_u}{\pi n^2} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{3}\right) \quad (II)$$

◇

Infine per un valore pari a $x_0 = \frac{L}{4}$, l'espressione diviene:

$$= \frac{2\Delta_u}{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}} \frac{16}{3L^2} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right) = \frac{32\Delta_u}{3\pi n^2} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right) \quad (III)$$

◇

Si osserva come nel caso di $x_0 = \frac{L}{3}$, il seno si annulla per multipli di $n = 3$, mentre nel caso $x_0 = \frac{L}{4}$, per multipli di $n = 4$.

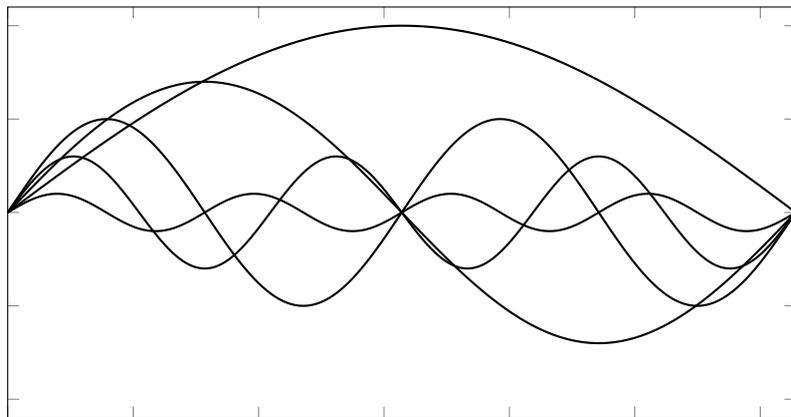


Figura: Sovrapposizione di armoniche

6 Risultati

Le tabelle riportano i valori misurati su un *Mi*(cantino) di una chitarra classica a 6 corde. La prima tabella riporta le misure pizzicando la corda a metà, la seconda ad un terzo e l'ultima ad un quarto di L .

Valori misurati per $x_0 = \frac{L}{2}$

	Misura I	Misura II
Amp. Fondamentale	26.53 ± 10	27.72 ± 10
Freq. Fondamentale	335.30 ± 0.01	336.72 ± 0.01
Amp. 2 Armonica	10.94 ± 10	10.89 ± 0.01
Freq. 2 Armonica	980.10 ± 0.01	978.00 ± 0.01
Amp. 3 Armonica	4.53 ± 10	5.12 ± 10
Freq. 3 Armonica	1650.00 ± 0.01	1648.00 ± 0.01
Amp. 4 Armonica	16.77 ± 0.01	16.72 ± 0.01
Freq. 4 Armonica	2295.15 ± 10	2290.13 ± 10
Amp. 5 Armonica	0.80 ± 0.01	0.72 ± 0.01
Freq. 5 Armonica	2965.00 ± 10	2966.10 ± 10

Valori misurati per $x_0 = \frac{L}{3}$

	Misura I	Misura II
Amp. Fondamentale	9.57 ± 10	10.72 ± 0.01
Freq. Fondamentale	324.40 ± 0.01	320.72 ± 10
Amp. 2 Armonica	7.10 ± 10	8.72 ± 0.01
Freq. 2 Armonica	654.80 ± 0.01	649.72 ± 10
Amp. 3 Armonica	0	0
Freq. 3 Armonica	×	×
Amp. 4 Armonica	0.80 ± 0.01	0.72 ± 1
Freq. 4 Armonica	1312.00 ± 10	1314.12 ± 10
Amp. 5 Armonica	1.44 ± 0.01	1.82 ± 0.01
Freq. 5 Armonica	1640.12 ± 10	1645 ± 10
Amp. 6 Armonica	0	0
Freq. 6 Armonica	×	×
Amp. 7 Armonica	0.50 ± 0.01	0.72 ± 0.01
Freq. 7 Armonica	2297.12 ± 10	2298 ± 10

Valori misurati per $x_0 = \frac{L}{4}$

	Misura I	Misura II
Amp. Fondamentale	14.02 ± 10	18.72 ± 10
Freq. Fondamentale	330.30 ± 0.01	334.72 ± 0.01
Amp. 2 Armonica	4.51 ± 10	8.75 ± 0.01
Freq. 2 Armonica	655.60 ± 0.01	658.72 ± 10
Amp. 3 Armonica	1.88 ± 10	5.72 ± 0.01
Freq. 3 Armonica	986.30 ± 0.01	970.09 ± 10
Amp. 4 Armonica	0	0
Freq. 4 Armonica	×	×
Amp. 5 Armonica	1.11 ± 0.01	1.72 ± 0.01
Freq. 5 Armonica	1642.12 ± 10	1650.00 ± 10
Amp. 6 Armonica	1.3 ± 0.01	2.72 ± 0.01
Freq. 6 Armonica	1967.12 ± 10	1966.15 ± 10
Amp. 7 Armonica	0.50 ± 0.01	1.45 ± 0.01
Freq. 7 Armonica	2298.12 ± 10	2288.34 ± 10
Amp. 8 Armonica	0	0
Freq. 8 Armonica	×	×

◇

7 Discussione

Pizzicando la corda a metà della sua lunghezza, analizzando lo spettro delle relative armoniche, si è scoperto, in sostanza come siano presenti solo quelle dispari. Del resto, la fondamentale, la cui lunghezza d'onda è pari al doppio della lunghezza della corda $\lambda = \frac{2L}{n} = 2L$ corrisponde al valore $n = 1$ (dispari), e così tutti gli altri valori per n dispari. Come si evince dai due grafici, per i casi $x_0 = \frac{L}{3}$ ed $x_0 = \frac{L}{4}$, si osserva come la scelta di pizzicare la corda ad un terzo della lunghezza elimini la 3 e la 6 armonica dallo spettro, mentre nel secondo caso la 4 e la 8, come segue dalle formule (II) e (III)

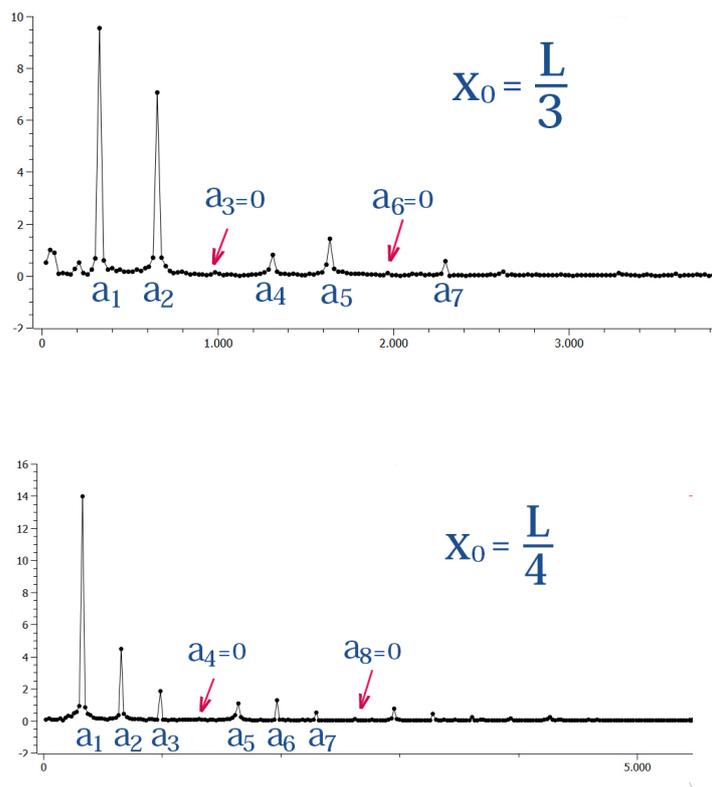


Figura 1: In alto: lo spettro per $x_0 = \frac{L}{3}$, in basso lo spettro per $x_0 = \frac{L}{4}$

7.1 Stima dell'ampiezza

Indipendentemente dall'accuratezza della misura, la stima dell'ampiezza è risultata più complessa da ricavare, per i seguenti motivi. Anzitutto la posizione del microfono. Si è cercato di mantenere una posizione approssimativamente eguale durante le misure - inoltre da una misura all'altra, il fattore più delicato è stato il trattamento del tocco sulla corda (matematicamente modellizzato dal valore Δ_u). Essendo il valore direttamente proporzionale all'intensità dell'onda stessa. Si è sperimentato come (del resto ci si aspetta sia naturale) maggiore è il punto in cui si lascia cadere la corda, maggiore ne è risultata l'intensità.

8 Conclusioni e note

Si è mostrato come si possano eccitare le diverse armoniche di una corda a partire dalle condizioni iniziali relativamente al punto in cui si tocca la corda stessa.

9 Bibliografia

- Renato Spagnolo Acustica
- Wikipedia