

Risonanza in tubi a fondo chiuso

Giuseppe Sottile

4 maggio 2021



1 Abstract

Si analizza di seguito il fenomeno della risonanza e delle onde stazionarie in diversi tubi a fondo chiuso. Si verifica l'accuratezza del modello matematico che mette in relazione i principali parametri fisici di lunghezza d'onda, frequenza e armoniche con i parametri geometrici dei tubi in questione. Si discutono infine i dati delle misure per estrarre alcune informazioni caratteristiche dell'esperimento.

2 Keywords

Risonanza, Spettro, Tubes, Waves, Helmholtz, Armoniche, Pan flute

3 Materiale

- Smartphone Mate 10 Pro BLA-L09 con Sistema operativo Android 10 - 6Gb RAM, Processore HiSilicon Kirin 970.
- Applicazione PhyPhox
- Programma Excel/Scidavis
- Tubi in plastica, PVC, vetro, di diverse dimensioni e diametro
- Metro per distanze
- Nastro isolante

4 Introduzione

Il suono è un fenomeno fisico rappresentato da un'onda che si propaga in un mezzo come l'acqua, l'aria o un solido. A seconda della densità del mezzo, l'onda sonora viaggia più o meno veloce. Per semplicità considereremo come mezzo di propagazione l'aria, in queste ipotesi sappiamo che la velocità di propagazione del suono è di circa $343.8 \frac{m}{s}$ ad una temperatura di $(19 - 20)C^o$.

4.0.1 Risonanza

La determinazione dei modi di risonanza in un tubo può avvenire sostanzialmente in configurazione **a fondo chiuso** oppure a **fondo aperto**. In entrambi i casi un'onda stazionaria è generata da una colonna d'aria presente all'interno del tubo eccitata da una fonte esterna (come ad esempio un soffio sull'imboccatura). A seconda che il tubo sia aperto o chiuso si sperimenta il fatto che l'onda di pressione si accorda relativamente a $\lambda/4$ ($\frac{\lambda}{4}$) e $\lambda/2$ ($\frac{\lambda}{2}$), nel senso che nel primo caso la relazione che lega la fondamentale alla lunghezza d'onda è un rapporto di 1 : 4, mentre nel secondo caso di 1 : 2. In sostanza l'onda nell'incontrare l'ostacolo della base del cilindro, rimbalza, creando un nodo ed un ventre, mentre nel secondo caso, essendo aperto il tubo, si creano 2 ventri¹. Il modello matematico-empirico nei due casi è riportato di seguito:

$$L_{CHIUSO} = \frac{\lambda n}{4} \qquad L_{APERTO} = \frac{\lambda n}{2}$$

Dove $n = 1, 2, 3, \dots$ è un numero naturale che indica il numero dell'armonica. Dalla relazione fondamentale $v_s = \lambda f \rightarrow \lambda = \frac{v_s}{f}$, possiamo ricavare una relazione che lega la frequenza della nota suonata al tubo:

$$L_{CHIUSO} = \frac{v_s n}{4f} \qquad L_{APERTO} = \frac{v_s n}{2f}$$

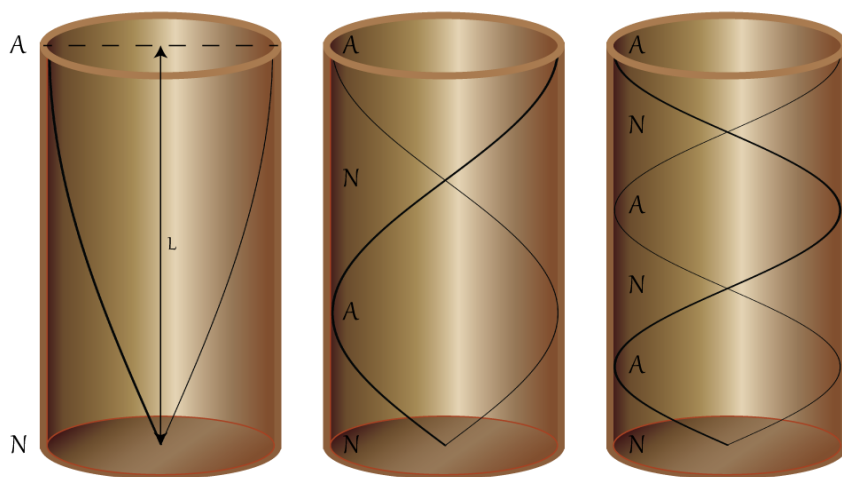


Figura 1: Modi (1, 3, 5) di un'onda di spostamento dell'aria su un tubo a fondo chiuso

¹L'onda in questione è un'onda di spostamento

5 Procedimento

Nella prima parte dell'esperienza, si sono svolte delle misure relativamente ad un insieme di tubi in PVC a fondo chiuso di diverse lunghezze, ma tutti dello stesso diametro pari a $1.6cm$. Per chiudere il fondo di ciascun tubo si è usato del comune nastro isolante per impianti elettrici, con la dovuta accuratezza in modo da isolare ogni fuori uscita di aria mantenendo ben solida la chiusura per evitare vibrazioni.

5.0.1 Determinazione lunghezza tubo a partire da una frequenza nota

Conoscendo il valore di una certa frequenza, ad esempio un $La_3 = 440Hz$, si è calcolato, utilizzando il semplice modello accennato nell'introduzione, il valore della lunghezza, ossia:

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{v_s}{4f} = \frac{343.8}{4 \cdot 440} \approx 0.19m$$

Tutte le misure dei valori cosiddetti attesi sono riportati in tabella più avanti.

Nell'analisi della trasformata di Fourier rapida (FFT), i picchi delle armoniche non essendo ben definiti necessitano di una certa informazione relativamente al margine di errore. Per la determinazione dell'incertezza si è impiegato il range per cui il valore dell'intensità dell'armonica è maggiore di $\frac{1}{10}$ del suo valore massimo come espresso in figura di seguito:

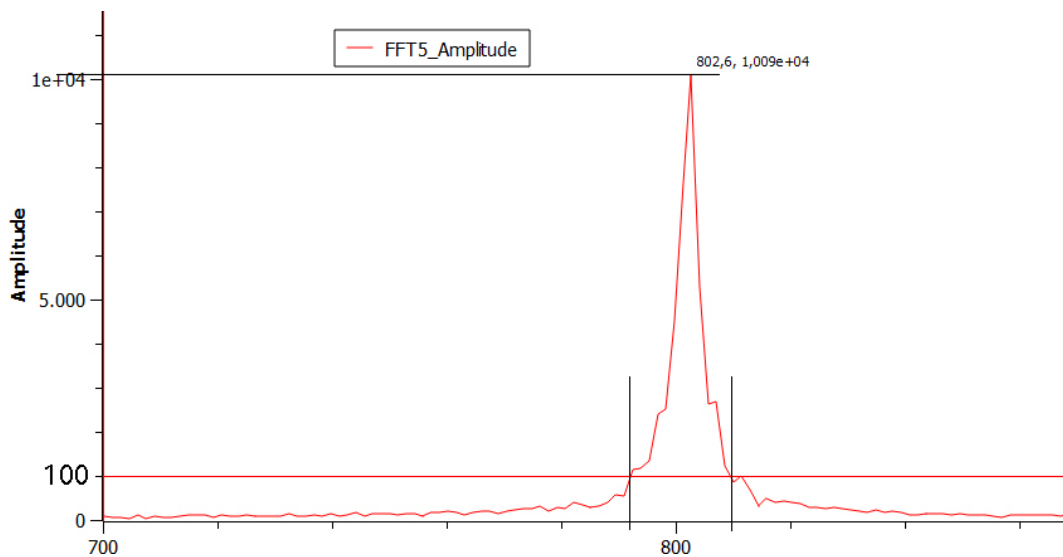


Figura 2: Incertezza nella determinazione del picco

5.1 Analisi di tubi considerando il diametro

Come seconda tipologia di esperimento si è scelto di misurare due tubi aventi la stessa lunghezza ma diametro differente. Si è cercato di soffiare a diversa intensità come suggerito nella traccia dell'esperimento per innescare anche eventuali armoniche a frequenza superiore ad intensità maggiore rispetto alla fondamentale.

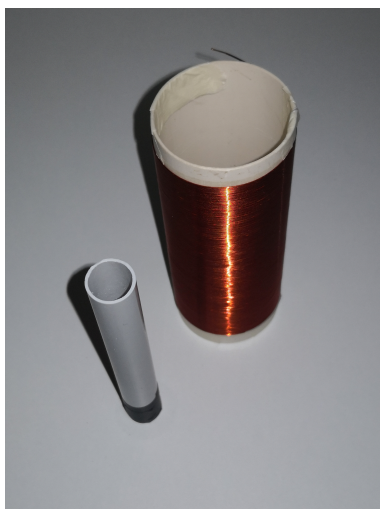


Figura 3: particolare dei tubi impiegati nelle misure

6 Risultati

Per la determinazione dell'errore relativamente alla lunghezza d'onda si è fatto uso della seguente relazione di propagazione dell'errore

$$\frac{\delta\lambda}{|\delta\lambda|} = \frac{\delta\frac{v_s}{f}}{|\delta\frac{v_s}{f}|} = \frac{\delta v_s}{|\delta v_s|} + \frac{\delta f}{|\delta f|}$$

Misure Tubo no. 1 (Sol 5)

#Picco	$v_{max}^i(Hz)$	$\Delta v_i(Hz)$	Ampiezza (a.u.)	$\lambda_i(m)$	$\delta\lambda_i(m)$
1	802.70	10.2	10006	0.42	0.11
3	2407.69	14.02	693.2	0.14	0.10
5	4008.00	19	71.9	0.08	00.10
7	5612.10	17.98	309.2	0.06	0.10
9	7217.00	17	229.5	0.04	0.10

Misure Tubo no. 2 (Fa# / Sol b 6)

#Picco	$v_{max}^i(Hz)$	$\Delta v_i(Hz)$	Ampiezza (a.u.)	$\lambda_i(m)$	$\delta\lambda_i(m)$
1	1466	12.20	1186.41	0.23	0.10
3	4300	15.02	805.61	0.07	0.10
5	7282	11.34	356.80	0.04	00.10
7	5612.10	14.04	160.20	0.03	0.10
9	7217.00	11.02	75.50	0.02	0.10

Valori attesi per tubo no. 1 (Sol 5)

Armonica (n)	$f_i(Hz)$	$L(m)$
1	850.99	0.101
3	2552.97	0.101
5	4254.95	0.101
7	5956.93	0.101
9	7658.91	0.101

Valori attesi per tubo no.2 (Fa# / Sol b 6)

Armonica (n)	$f_i(Hz)$	$L(m)$
1	1685.29	0.051
3	5055.88	0.051
5	8426.47	0.051
7	11797.06	0.051
9	15167.65	0.051

◇

7 Discussione

La particolarità dei tubi risiede anzitutto nel rapporto tra la lunghezza ed il diametro. Questo è trascurabile quando la lunghezza è molto maggiore di esso. Nelle misure si è osservato che il diametro è una delle grandezze che maggiormente incide sulla discrepanza tra i valori attesi ed i valori misurati (e/o reali) del modello della risonanza semplificato. Altri fattori sono dovuti alla posizione delle labbra sul collo del tubo stesso.

Provando infatti a soffiare nel tubo, si è osservato che la nota risultante non è perfettamente esatta, ma, come direbbero i musicisti, risulta ad esempio essere calante, nel senso che essa ha una frequenza inferiore di qualche decina di unità rispetto a quella attesa. In sostanza il tubo ha una lunghezza maggiore di quella corrispondente alla nota misurata.

7.0.1 Spettro

Lo spettro delle armoniche misurato attraverso la FFT, ha evidenziato un fatto singolare, ossia che le armoniche che incidono in maggior presenza in termini di ampiezza sul timbro sono quelle dispari (la 1, la 3, 5 ecc). Le armoniche pari sono anch'esse presenti, ma in minima parte ed a bassissima ampiezza.

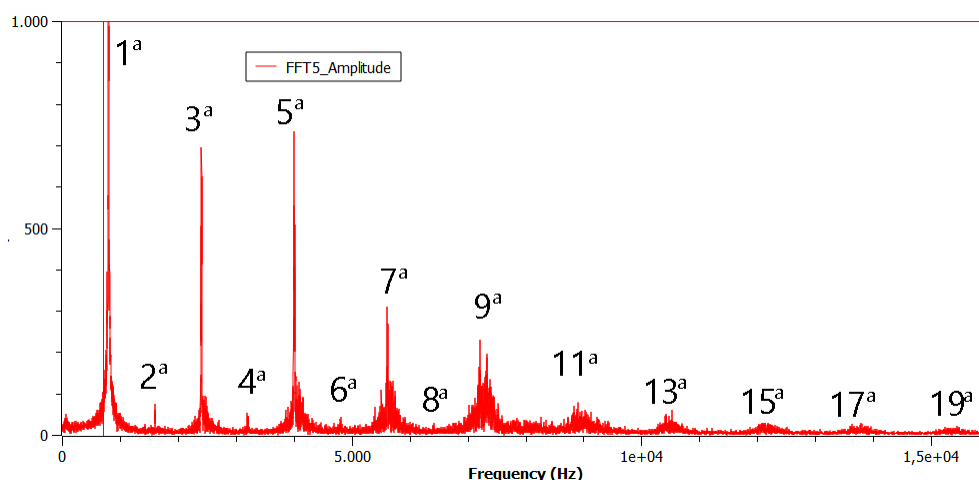


Figura 4: Trasformata di Fourier

Rispetto ai valori attesi, come accennato nell'introduzione i valori misurati si discostano di qualche centinaia di unità in eccesso. Ad esempio, dalla relazione fondamentale, un tubo chiuso a lunghezza $L = 10cm$, genera una fondamentale pari a $\frac{343}{4L} \approx 850Hz$, tuttavia le misure riportano dei valori non perfettamente coincidenti, e la discrepanza aumenta quanto maggiore è il diametro del tubo. Tuttavia, esiste una relazione empirica che tiene conto del diametro e raffina il modello. La relazione assume la seguente forma:

$$f = \frac{v_s}{4(L + 0.4D)}$$

Dove D è il diametro in metri del tubo, L , la lunghezza in metri e v_s è la velocità del suono. Ad esempio, applicando la correzione alla formula precedente sui dati relativi alle misure del primo esperimento si ottengono i seguenti valori:

◇

Valori attesi per tubo no.1 (Sol 5) (con correzione diametro)

Armonica (n)	$f_i(Hz)$	$L(m)$
1	800.27	0.101
3	2400.83	0.101
5	4001.39	0.101
7	5601.95	0.101
9	7202.51	0.101

Si osserva come l'aver introdotto il diametro, porta ad un divario tra valori attesi e valori reali di poche unità, rispetto al caso precedente.

7.0.2 Impulso su un tubo

Durante le fasi di sperimentazione, si è osservata una caratteristica interessante. Prendendo un tubo aperto da entrambi i lati è colpendolo sul palmo della mano "impulso", in qualche modo si udisce la medesima nota che si ottiene soffiando nel tubo dopo aver chiuso diligentemente il fondo. Tuttavia, benché il suono udito sia lo stesso, il principio o meglio la causa e l'effetto sono differenti. Nel primo caso si soffia e una vibrazione dell'aria all'interno del tubo, nel secondo trattandosi di un impulso, si mette in vibrazione anche il tubo stesso, di conseguenza lo spettro assume un picco maggiore sulla fondamentale rispetto a quando si soffia.

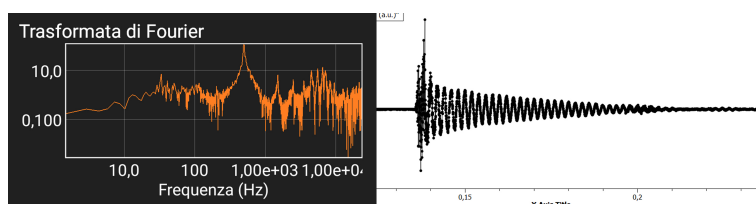


Figura 5: Risposta ad un impulso sul tubo

La figura mostra la trasformata di Fourier a sinistra ed il segnale nel tempo a destra. Si osserva un inviluppo del segnale decrescente, tipico di una risposta all'impulso temporale di un segnale evanescente in un breve intervallo. Nel caso di tubi più lunghi l'inviluppo ha una durata maggiore rispetto a tubi più corti, come mostrato di seguito

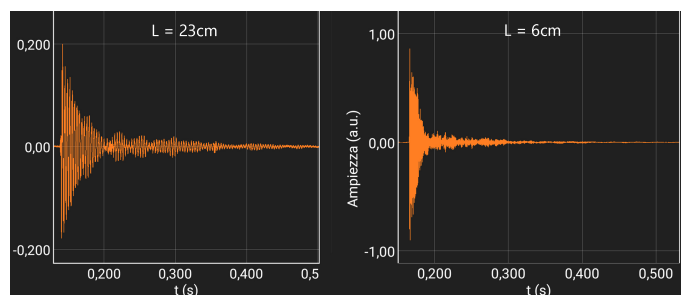


Figura 6: Inviluppi

7.1 Costruzione di un flauto di Pan

Come risultato dell'esperienza, a partire dalle osservazioni e dagli studi compiuti sperimentando la risonanza, si è implementato uno strumento musicale con del materiale semplice conosciuto come il **Flauto di Pan**. Questo strumento musicale è costituito, sostanzialmente da un insieme di tubi (a fondo chiuso) dimensionati correttamente di modo da risuonare un set di note standard riconosciute in ambito musicale. La tabella riporta il valore delle lunghezze dei tubi e delle relative frequenze e note dello strumento (a 23 note).

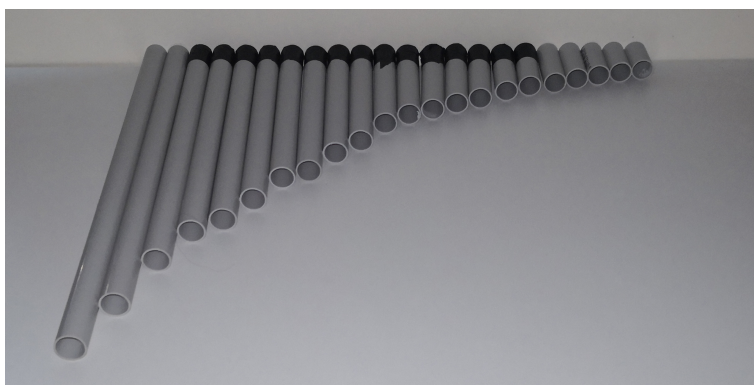


Figura 7: Flauto di Pan

Nota	Frequenza	Lunghezza(D)	Lunghezza
C4	261.63	0.322	0.328
D4	293.66	0.286	0.292
E4	329.66	0.254	0.260
F#4/Gb4	369.99	0.225	0.232
G4	392.00	0.212	0.219
A4	440.00	0.188	0.195
B4	493.88	0.167	0.174
C5	523.33	0.157	0.164
D5	587.33	0.139	0.146
E5	659.25	0.123	0.130
F#5/Gb5	739.99	0.109	0.116
G5	783.99	0.103	0.109
A5	880.00	0.091	0.097
B5	987.77	0.080	0.087
C6	1046.50	0.075	0.082
D6	1174.66	0.066	0.073
E6	1318.51	0.058	0.065
F#6/Gb6	1479.98	0.051	0.058
G6	1567.98	0.048	0.054
A6	1760.00	0.042	0.048
B6	1975.53	0.037	0.043
C7	2093.00	0.034	0.041
D7	2349.32	0.030	0.036

8 Conclusioni e note

L'esperimento ha evidenziato alcune caratteristiche dei suoni e della risonanza nei tubi o cavità a fondo chiuso. Si è evidenziato il fatto di come la descrizione ideale del modello risulta essere, nei casi reali, alterata da diversi fattori esterni. In queste ipotesi, la legge o le leggi empiriche non riescono a cogliere con esattezza il comportamento esatto della risonanza. Un modello più accurato potrebbe descrivere il fenomeno in condizioni di assoluto silenzio in una camera anecoica senza flussi d'aria o altri disturbi esterni, inoltre si potrebbe idealizzare un modello più fine e complesso che terrebbe conto di ulteriori dettagli fisici (oltre a quelli geometrici), come ad esempio l'elasticità del tubo, il materiale di costruzione, la massa e così via; e quelli del mezzo gassoso stesso.

9 Bibliografia

- Acustica. Fondamenti e applicazioni, Renato Spagnolo - UTET 2015
- manuale di Acustica, F. Alton Everest - HOEPLI 1996
- Wikipedia