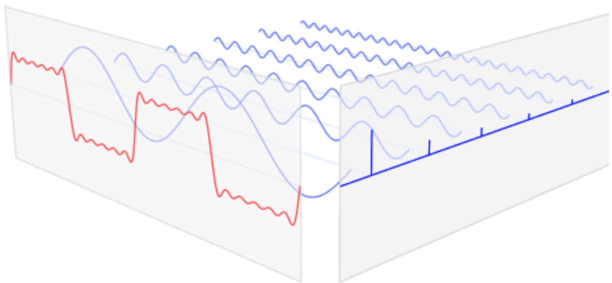
Spettro sonoro

Giuseppe Sottile

13 aprile 2021



1 Abstract

Di seguito si descrive l'analisi di un suono nel dominio della frequenza (analisi armonica). Per diversi suoni semplici e complessi se ne studia lo spettro delle frequenze e le relative peculiarità che contraddistinguono il cosiddetto "timbro" di un suono.

2 Keywords

Suoni, Armoniche, Fourier, Frequenza, Spettro, Timbro

◇

3 Materiale

- Smartphone Mate 10 Pro BLA-L09 con Sistema operativo Android 10 - 6Gb RAM, Provessore HiSilicon Kirin 970.
- Generatore di funzioni periodiche
- Diapason
- Oscilloscopio con funzione (Analizzatore di spettro FFT)
- Strumenti musicali vari: (violino, chitarra, ecc)

4 Introduzione

Uno dei settori più belli ed avanzati della matematica è sicuramente l'Analisi di Fourier o **"Analisi Armonica"**. Di cosa si tratta? In sostanza alla base della teoria c'è una regola semplice, che pare sia stata scoperta dal Matematico Francese **Jean Baptiste Fourier**[1]. mentre studiava l'equazione di conduzione del calore: Se prendete un segnale "complesso", un'onda non banale (un parlato, o un suono di uno strumento musicale), esso lo si può scomporre nei suoi costituenti elementari (così come una casa di lego si può scomporre nei singoli mattoncini, o un colore secondario nei suoi colori primari)[2], cioè delle sinusoidi che rappresentano frequenze pure. L'analisi armonica studia i fenomeni ondulatori nel dominio della frequenza, il suono, abbiamo visto è un fenomeno che si può descrivere come un'onda, così come anche le onde elettromagnetiche, o le onde sulla superficie dell'acqua ecc. Nel contesto un suono complesso si puo rappresentare attraverso la cosiddetta **Serie di Fourier**

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k cos(n\omega_0 k) + \beta_k sen(n\omega_0 k)$$

Dove α_k e β_k, sono le ampiezze delle sinusoidi elementari, mentre ω_k le pulsazioni, e quindi le frequenze (ricordiamo che frequenza e pulsazione sono lagate dalla relazione fondamentale $\omega = 2\pi f$). Possiamo dire, facendo una metafora, che $cos(\omega_0 k)$ e $sen(\omega = k)$ sono gli ingredienti di una ricetta, mentre α_k e β_k sono le quantità dei singoli ingredienti.[3].
I valori delle ampiezze, detti anche **coefficienti di Fourier**, si possono ricavare dalle seguenti relazioni integrali:

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$\alpha_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)cos(n\omega_0 k)dt$$

$$\alpha_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sen(n\omega_0 k)dt$$

◇

[1] Poi formalizzata in seguito in un contesto più avanzato dalla teoria degli spazi vettoriali su L^2

[2] Alla base della teoria c'è il concetto di spazio vettoriale. In sostanza le sinusoidi elementari formano una base di uno spazio vettoriale a dimensione infinita (spazio di Hilbert) ed i suoni complessi sono le le loro combinazioni lineari

[3] ω_0 è la pulsazione fondamentale

5 Procedimento

5.1 Misura della forma d'onda di un suono complesso

Ciascuna delle sorgenti sonore (strumento musicale, voce, diapason) è stata misurata attraverso la funzione **Spettro Audio** messa a disposizione dalla suite **Phybox** sullo smartphone. La misura è stata effettuata in una stanza con un rumore di fondo intrinseco prossimo a $50db_{SPL}$[4], ad un temperatura di circa 19^oC[5].

Per effettuare ciascuna misura si è utilizzato il microfono integrato allo smartphone e la relativa funzione **Spettro Audio**. Questa funzione opera il procedimento (o algoritmo) della **Trasformata rapida di Fourier FFT**[6], per cui, di un'onda sonora variabile nel tempo, ne viene estratto il contenuto armonico, ossia lo spettro delle frequenze, allo stesso modo in cui si comporta l'orecchio umano, che, con l'ausilio di migliaia di "sensori naturali" percepisce i singoli toni puri elementari (timbro).

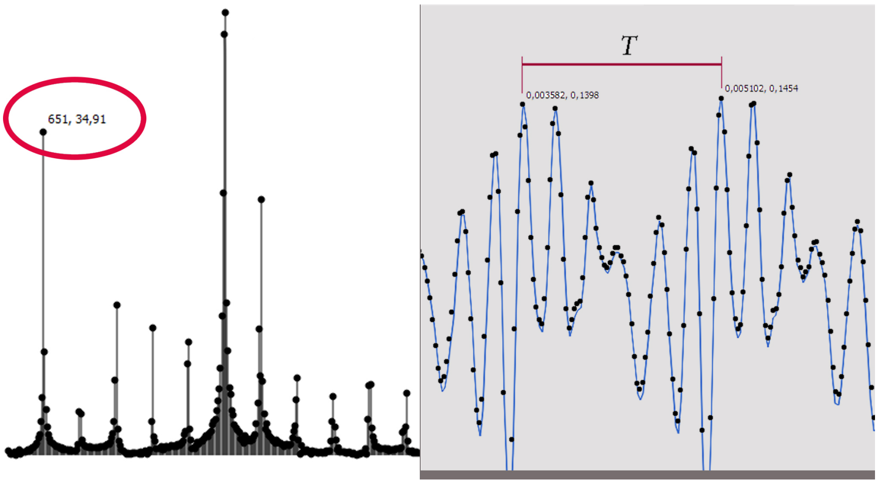


Figura 1: Misurazioni

Per l'analisi dei dati e la relativa elaborazione si è impiegato il software **SciDAVis**, del tutto simile ad **Excel** ma più orientato per scopi scientifici. Ad esempio lo strumento plot consente una vista più agevole del grafico di una funzione a partire da un set di valori. Adoperando questo strumento è possibile visualizzare a colpo d'occhio l'andamento ondulatorio della forma d'anda tempovariante (dati RAW) dell'onda acquisita dallo smartphone: Nella figura 1, si osserva come l'armonica fondamentale essendo la componente a frequenza minore, ha associata, o meglio, ad essa corrisponde il periodo massimo. Misurando infatti l'intervallo di tempo tra due ventri si ha:

$$T = 0.005102 - 0.003582 = 0.0016s$$

Dalla relazione che lega il periodo alla frequenza si ha:

$$f_{fond} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.00152} \approx 657Hz$$

Che corrisponde in linea di massima (a meno di 6 unità) alla frequenza fondamentale nello spettro delle armoniche.

[4]Il livello di fondo è stato misurato attraverso la funzione **Ampiezza audio** in Phybox
[5]il valore utilizzato per la velocità del suono, in base ai dati sperimentali è $343\frac{m}{s}$.
[6]Fast Fourier Transform

6 Risultati

Di seguito i risultati relativi alle misurazioni. La tabella riporta le prime armoniche relativamente ad alcune sorgenti sonore misurate.

	$Diapason$	$MI - Gtr$	$MI - Violino$	$Vocale(E)$	$FischioMI$
Freq. Fondamentale	135 Hz	332.3 Hz	651 Hz	126 Hz	1360 Hz
Amp. Fondamentale	21.84	15.39	34.94	386.8	305
Freq. 2 Armonica	×	644.5 Hz	1323 Hz	252 Hz	×
Amp. 2 Armonica	×	13.82	4.9	171	×
Freq. 3 Armonica	×	980.8 Hz	1999 Hz	376 Hz	×
Amp. 3 Armonica	×	17.49	16.2	52.2	×
Freq. 4 Armonica	×	1317 Hz	2651 Hz	503 Hz	×
Amp. 4 Armonica	×	1.9	13.9	55.5	×
Freq. 5 Armonica	×	1529 Hz	3302 Hz	629 Hz	×
Amp. 5 Armonica	×	0.8	12.4	37.2	×
Freq. 6 Armonica	×	1966 Hz	3954 Hz	751 Hz	×
Amp. 6 Armonica	×	2.2	59.2	12.2	t
Freq. 7 Armonica	×	2326 Hz	4630 Hz	×	×
Amp. 7 Armonica	×	0.9	27.5	×	×
Freq. 8 Armonica	×	2638 Hz	5306 Hz	×	×
Amp. 8 Armonica	×	1.4	8.5	×	×
Freq. 9 Armonica	×	2974 Hz	5957 Hz	×	×
Amp. 9 Armonica	×	1.5	6.5	×	×
Freq. 10 Armonica	×	3311 Hz	6633 Hz	×	×
Amp. 10 Armonica	×	2.5	7.7	×	×
Freq. 11 Armonica	×	3623 Hz	7285 Hz	×	×
Amp. 11 Armonica	×	1.0	6.8	×	×
Freq. 12 Armonica	×	3959 Hz	7936 Hz	×	×
Amp. 12 Armonica	×	0.6	3.3	×	×
Freq. 13 Armonica	×	4295 Hz	8612 Hz	×	×
Amp. 13 Armonica	×	2.4	1.6	×	×
Freq. 14 Armonica	×	4608 Hz	×	×	×
Amp. 14 Armonica	×	0.6	×	×	×
Freq. 15 Armonica	×	4968 Hz	×	×	×
Amp. 15 Armonica	×	3.5	×	×	×

◇

7 Discussione

La prima caratteristica importante, guardando i grafici, è legata alla posizione delle linee spettrali corrispondenti alle armoniche superiori. Queste sono situate a frequenze multiple della fondamentale. Ad esempio nel caso della nota MI suonata dal violino, se riportiamo la successione delle prime armoniche abbiamo:

$$332 \rightarrow 644 \rightarrow 980 \rightarrow 1317$$

Dove si osserva (con un certo margine di errore) una certa regolarità, ad esempio la seconda armonica è il doppio della prima, la terza è circa tre vole la prima e così, via. Si osserva, inoltre (dalla tabella), come il MI della chitarra è accordato ad un'ottava inferiore rispetto a quello del violino (in quanto la fondamentale è circa la metà).

In ciascun grafico inoltre si osserva un'altra caratteristica che accomuna tutti gli spettri sonori delle diverse sorgenti. In sostanza le armoniche superiori descrescono in ampiezza. Più si considerano armoniche a frequenza multipla, minore è la loro intensità (ed il loro contributo energetico); ma ciò non accade sempre con regolarità. Può accadere che ci siano armoniche (e/o gruppi di armoniche) con frequenze maggiori di altre, aventi però, ampiezza maggiore come accade ad esempio nello spettro del violino.

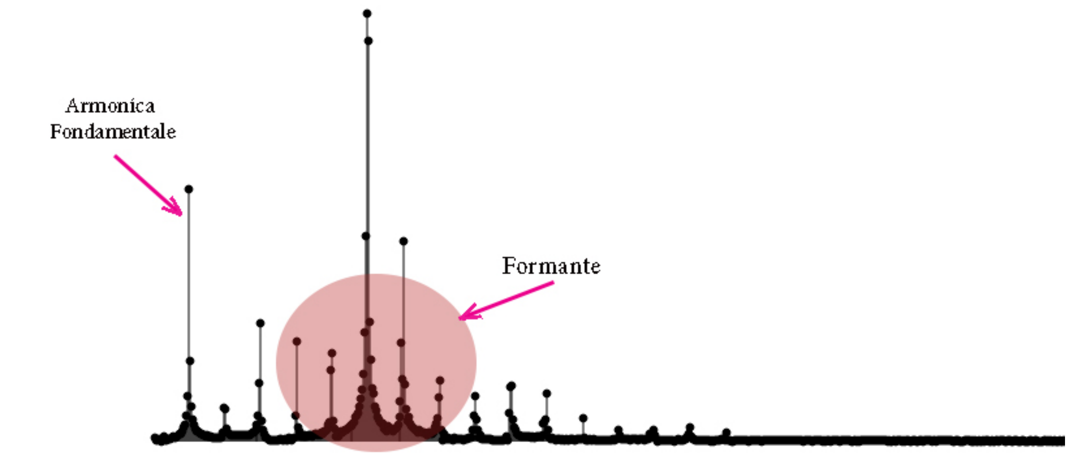


Figura 2: Analisi spettrale di un MI suonato su un violino

Il motivo di questo fenomeno è dovuto alle risonanze dello strumento per quelle particolari frequenze che appaiono ad ampiezza maggiore (le cosiddette **formanti**[7]). In sostanza lo strumento provoca delle particolari risonanze le quali incrementano il contenuto energetico di alcune aree dello spettro (boost). Ad esempio nello spettro del violino, in figura, si osserva come il gruppo di armoniche (cerchiato in rosso) presenta un incremento rispetto alla fondamentale.

[7] Teoria delle formanti

7.1 Analisi spettrale di un tono puro

L'analisi in frequenza del suono generato dal diapason, mostra, come ci si aspetta, un'unica linea spettrale coincidente con la frequenza di risonanza del diapason stesso (il tono puro emesso quando il diapason viene percosso). Tuttavia in alcuni contesti la linea spettrale non è perfettamente "impulsiva" ma presenta una "banda simmetrica stratta" (Come ad esempio nel fischio) le cui frequenze immediatamente vicine decrescono regolarmente come mostrato in figura (6):

◇

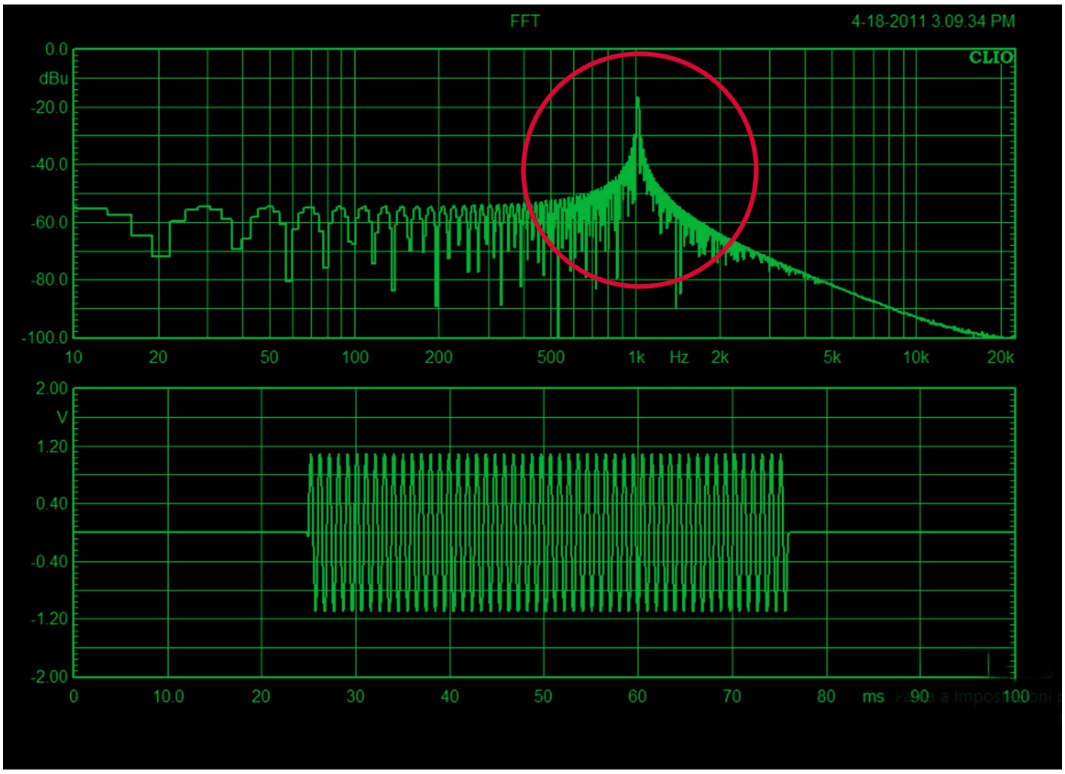


Figura 3: Analisi spettrale di una sinusoide ad 1KHz

La non impulsività o meglio, il fatto che la banda corrispondente alla frequenza di risonanza del diapason abbia più o meno una certa ampiezza, può dipendere da diversi fattori, come ad esempio la distorsione, che introduce nuove armoniche e quindi modifica la forma d'onda ed il contenuto armonico, oppure anche, nel caso di strumenti digitali, fenomeni correlati all'aliasing[8] ed al campionamento.

7.2 Analisi spettrale di un rumore bianco (White Noise)

Per quanto riguarda il rumore bianco[9], si osserva come non si riesce ad individuare una frequenza "fondamentale" o delle armoniche specifiche. Lo spettro appare del tutto casuale e "piatto", le ampiezze non descrescono con regolarità.

[8]Campionando ad esempio una sinusoide ad una certa frequenza, non si è in grado di risalire all'effettiva forma sinusidale. Il teorema di Nyquist stabilisce che per campiohnare correttamente un segnale a banda limitata, bisogna escegliere ula frequenza di cmapionamento pari almeno al doppio della frequenza massima

[9]Un rumore bianco, è rappresentato dall'insieme di tutte le armoniche

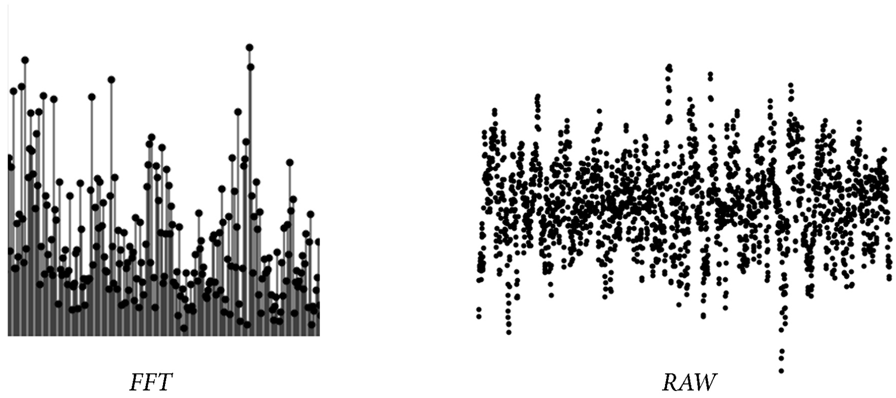


Figura 4: Analisi spettrale di un rumore bianco

8 Conclusioni e note

Possiamo concludere in buona sostanza affermando che ciò che contraddistingue il timbro sonoro, (ossia, il motivo per il quale una stessa nota suonata da sorgenti differenti "violino, voce ecc"; viene percepita diversamente) è il suo contenuto in frequenza, cioè l'insieme di tutte le armoniche superiori che caratterizzano il suono in se.

Nel caso di segnali non periodici, come i segnali sonori che troviamo in natura (un esempio per tutti: la voce umana), non è possibile esprimere il segnale complessivo come semplice somma di armoniche multiple della frequenza fondamentale. In altre parole, la serie di Fourier non è sufficiente in quanto i rapporti tra le frequenze componenti non sono descrivibili da multipli interi. In questo caso è necessario uno strumento matematico che tenga conto di tutte le frequenze coinvolte nel fenomeno acustico: **la trasformata di Fourier**.

9 Bibliografia

- Acustica. Fondamenti e applicazioni - R. Spagnolo - UTET 2015
- Fourier Series and Boundary Value Problems - James Brown, Ruel Churchill - McGraw Hill
- Manuale di Acustica - F.Alton Everest - HOEPLI 1996
- Wikipedia