

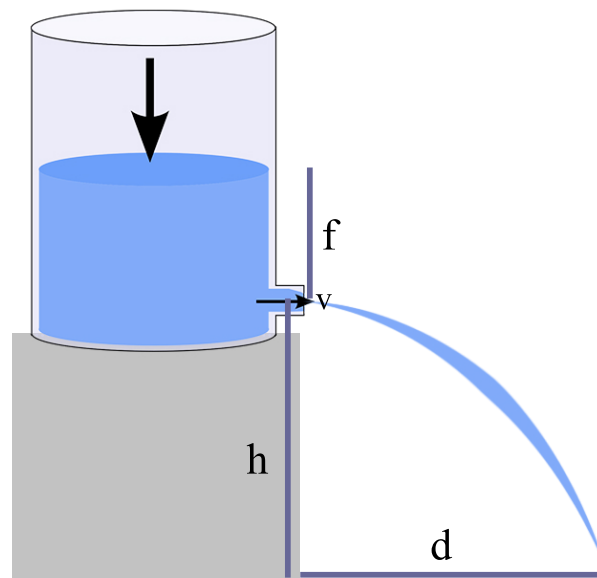
Principio di Torricelli

Giuseppe Sottile

15 dicembre 2020

Il Principio di Torricelli esprime una relazione tra la velocità del liquido all'imboccatura di un foro e la distanza a cui cade il fluido stesso, in particolare la distanza d è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza del foro dal pelo libero del liquido. L'esperienza consiste nel verificare suddetto principio, con le relative tecniche di propagazione degli errori, regressione lineare viste nel corso di laboratorio.

$$v = \sqrt{2gf}$$



1 Alcune considerazioni

Come nel primo esperimento, il liquido (supponiamo sia acqua) svolge un moto parabolico dall'imboccatura del foro e cade ad una distanza d data dalla seguente espressione:

$$d = \sqrt{\frac{2hv^2}{g}}$$

Sapendo che $v = \sqrt{2gf}$ possiamo sostituirlo nella relazione precedente ottenendo la nuova relazione per la distanza d :

$$d = \sqrt{\frac{2hv^2}{g}} = \sqrt{\frac{2h(\sqrt{2gf})^2}{g}} = \sqrt{\frac{2h(2gf)}{g}} = 2\sqrt{hf}$$



Figura 1: Alcune foto della strumentazione

2 Svolgimento

2.1 Strumentazione

Per la realizzazione dell'esperimento sono stati impiegati i seguenti oggetti: **secchio** per contenere acqua; **trapano** per foratura; **nastro isolante** per chiusura ed apertura fori; **rubinetto e tubo** per mantenere il l'altezza dell'acqua alla medesima quota; **metro** per misurazione delle distanze, **filo a piombo** come riferimento (zero) per la misura della distanza.

2.2 Procedimento

Ho iniziato l'esperimento praticando 4 fori di spessore di $1mm$ ad altezze diverse. Ho deciso di impiegare un secchio da 25Kg riempito quasi all'80% di modo da ridurre la variazione dell'altezza dell'acqua, inoltre ho posizionato una sorgente d'acqua per mantenere quasi costante il livello dell'acqua all'apertura dei fori (ho cercato dopo un po di "rodaggio") di far si che la portata della sorgente fosse eguale a quella del foro con l'aiuto di un tubo.

Di seguito riporto le suddette misurazioni delle grandezze h , d ed f in tabella (le misure sono espresse in cm):

f	h	d
13	47	46
10	51	40
6	55	30
17	38	45



Figura 2: Principio di Torricelli: Flussi d'acqua

2.3 Incertezze

L'incertezza su h e su f è dell'ordine del millimetro in quanto ho impiegato un metro con tacche, millimetriche, di conseguenza l'errore nella misurazione diretta è $\pm 0.001m$. Per stimare l'incertezza del prodotto hf ho impiegato la regola per le incertezze relative:

Ad esempio per la prima misura:

$$\frac{\delta(hf)}{|hf|} = \frac{\delta f}{|f|} + \frac{\delta h}{|h|} = \frac{0.001}{0.013} + \frac{0.001}{0.047} = 0.077 + 0.021 = 0.098 \approx 9.8\%$$

L'incertezza assoluta sarà quindi (per la prima riga):

$$13 \cdot 47(9.8\%) = 611 \cdot 9.8 \frac{1}{100} = 60cm$$

Per l'incertezza di d ho convenuto mettere circa 1mm in quanto il metro di misura riporta tacche da 1mm, ma dal momento in cui si è fatta una singola misura si potrebbe svrastimare di qualche millimetro l'errore (la scelta comunque ricade su 1mm).

Di seguito riporto la tabella con il calcolo delle incertezze per ciascuna grandezza come richiesto dalla traccia (le misure sono espresse in cm):

f	h	d	δf	δh	$\delta(fh)$	δd
13	47	46	0.1	0.1	60	0.1
10	51	40	0.1	0.1	61	0.1
6	55	30	0.1	0.1	61	0.1
17	38	45	0.1	0.1	55	0.1

2.4 Regressione lineare

Consideriamo la relazione

$$d = 2\sqrt{hf}$$

Operando il logaritmo in base dieci ad ambo i membri, si perviene ad una forma lineare della medesima equazione:

$$\log(d) = \log(2\sqrt{hf}) = \log(2) + \frac{1}{2}\log(hf)$$

$$\underbrace{\log(d)}_y = \log(2) + \frac{1}{2}\underbrace{\log(hf)}_x$$

$$y = \log(2) + \frac{1}{2}x$$

Attraverso il metodo dei minimi quadrati facciamo una regressione lineare delle variabili x ed y , ossia troviamo la retta che interpola i punti di coordinate (x, y) . La tabella aggiornata con i nuovi valori è:

f	h	d	δf	δh	$\delta(fh)$	x	y	x^2	xy
13	47	46	0.1	0.1	60	2.78	1.67	7.76	4.63
10	51	40	0.1	0.1	61	2.70	1.60	7.33	4.33
6	55	33	0.1	0.1	61	2.51	1.47	6.34	3.82
17	38	45	0.1	0.1	55	2.81	1.65	7.89	4.64
17	38	45	0.001	0.001	55	$\Sigma 10.82$	$\Sigma 6.43$	$\Sigma 29.33$	$\Sigma 17.44$

Per determinare l'intercetta ed il coefficiente angolare della retta lineare approssimatrice $y = A + Bx$, utilizziamo il metodo dei minimi quadrati, in particolare le seguenti relazioni (in cui i valori previsti sono $A = \log(2)$, $B = 0.5$:

$$\begin{cases} A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{cases} A = \frac{29.33 \times 6.43 - 10.82 \times 17.44}{4 \times 29.33 - (10.82)^2} = -\frac{0.05}{0.20} \approx 0.27 \\ B = \frac{4 \times 17.44 - 10.82 \times 6.43}{4 \times 29.33 - (10.82)^2} = \frac{0.10}{5.02} \approx 0.49 \end{cases}$$

Si osserva come i valori sono delle approssimazioni di 0.5 e di $\log(2) = 0.301$. La retta di regressione ottenuta è

$$y = A + Bx = (0.27) + (0.49)x$$

Per la determinazione delle incertezze di x ed y ho utilizzato la regola dell'incertezza per funzioni di una e/o più variabili come riportato di seguito:

$$\delta x = \delta(\log(hf)) = \left| \frac{\partial x}{\partial h} \right| \delta h + \left| \frac{\partial x}{\partial f} \right| \delta f = \left| \frac{1}{hf} f \right| \delta h + \left| \frac{1}{hf} h \right| \delta f$$

$$\delta y = \delta(\log(d)) = \delta(\log(2\sqrt{hf})) = \left| \frac{dy}{dd} \right| \delta d = \left| \frac{1}{d} \right| \delta d$$

Dui seguito la tabella con i dati complessivi ed il calcolo delle incertezze relativamente ad A , B ed y .

f	h	d	δf	δh	$\delta(fh)$	x	y	x^2	xy	δy	δx
13	47	46	0.1	0.1	60	2.78	1.67	7.76	4.63	0.02	0.009
10	51	40	0.1	0.1	61	2.70	1.60	7.33	4.33	0.02	0.011
6	55	33	0.1	0.1	61	2.51	1.47	6.34	3.82	0.03	0.018
17	38	45	0.1	0.1	55	2.81	1.65	7.89	4.64	0.02	0.008
						Σ 10.82	Σ 6.43	Σ 29.33	Σ 17.44		

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (y_i - A - Bx_i)^2} = \dots = \sqrt{\frac{6.27}{4}} \approx 0.013$$

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 x_i^2}{\Delta}} = \sigma_y \sqrt{\frac{29.33}{0.2}} \approx 0.15$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} = \sigma_y \sqrt{\frac{4}{0.2}} \approx 0.06$$

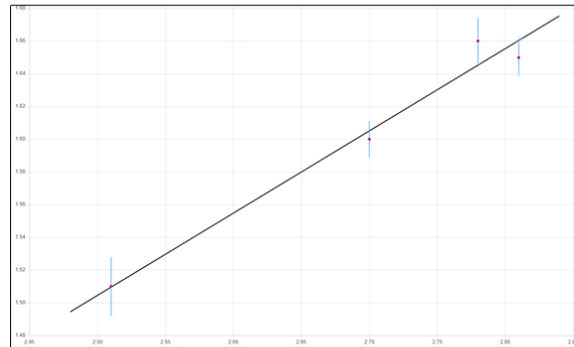
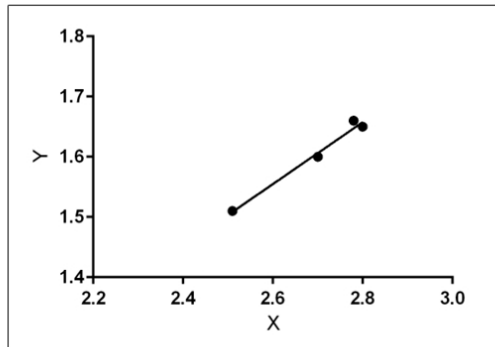


Figura 3: retta interpolatrice di regressione